

令和 8 年度 入学 試験 問題 (前期日程)

数 学 甲(数 I・数 II・数 III・数 A・数 B・数 C)

この冊子には、問題として **1**、**2**、**3**、**4** が出題されている。  
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は、必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は、120 分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1 定積分  $\int_0^2 x e^{-\frac{1}{2}x} dx$  を求めよ。

問2 関数  $f(x)$  は等式  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2} \int_0^2 \{f(t) - 2\} t dt$  をみたすとする。このとき、関数  $f(x)$  を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

で与えられているとする。関数  $y=f(x)$  のグラフを  $C$  とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1  $f(x)$  は以下の関係式をみたすことを示せ。

(i)  $\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$

(ii)  $f''(x) = f(x)$

ただし、 $f'(x)$  および  $f''(x)$  は、それぞれ  $f(x)$  の第1次導関数および第2次導関数を表す。

問2  $a > 0$  をみたす実数  $a$  に対して、曲線  $C$  上の点  $P(a, f(a))$  をとる。次に、曲線  $C$  上の点  $Q(b, f(b))$  を、点  $P$  における曲線  $C$  の接線と、点  $Q$  における曲線  $C$  の接線が直交するようにとる。このとき、曲線  $C$  の  $x=b$  から  $x=a$  までの長さ  $L$  を、 $b$  を用いずに  $a$  を用いて表せ。

問3  $L$  が最小値をとるときの  $a$  の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 複素数  $\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $i$  は虚数単位を表す。(50 点)

問1  $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$  の値を求めよ。

問2  $\cos \frac{2\pi}{5}$  の値を求めよ。

問3  $t$  を実数とすると、極限值

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{|t^4 + t^3\alpha + t^2\alpha^2 + t\alpha^3 + \alpha^4|^2}{(t-1)^2}$$

を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

**3** 解答欄

問 1

問 2

問 3

4 1個のさいころを3回投げる。出た目の最小値を  $M$  とする。このとき、次の問いに答えよ。(50点)

問1  $M$  が3以上になる確率を求めよ。

問2  $M$  が3になる確率を求めよ。

問3 最初に出た目を  $X$  とする。 $M$  が3であったときに、 $X$  が6である条件付き確率を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採 点 欄		
数 学 甲		
1		
2		
3		
4		
計		受 験 番 号

甲 解答例

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^{-\frac{1}{2}x} dx &= \left[-2x e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2 - \int_0^2 (-2e^{-\frac{1}{2}x}) dx \\ &= -4e^{-1} - \left[4e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{e}\end{aligned}$$

問 2

$$\int_0^2 \{f(t) - 2\} t dt = A \quad \dots\dots ①$$

とおくと、与式は

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2}A \quad \dots\dots ②$$

となる。②を①に代入して、

$$\int_0^2 \left\{e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{3}{2}A - 2\right\} t dt = A$$

従って、

$$\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}t} t dt + \frac{3}{2}A \int_0^2 t dt - 2 \int_0^2 t dt = A$$

問1の結果を用いて

$$\left(4 - \frac{8}{e}\right) + \frac{3}{2}A \cdot 2 - 4 = A$$

これより、 $A = \frac{4}{e}$ である。よって  $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{6}{e}$

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 (i)  $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  ゆえ

$$\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

(ii)

$$f''(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = f(x)$$

問 2 点 P における接線と点 Q における接線が直交する条件は、 $a > 0$  より  $f'(a) > 0$  に注意して

$$f'(b) = -\frac{1}{f'(a)} \quad \dots\dots ①$$

である。特に  $b < 0$  である。一方、求める長さ  $L$  は

$$L = \int_b^a \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

で与えられるが問 1 の関係式 (i), (ii) と  $f(a) > 0$  であることに注意して

$$L = \int_b^a f(x) dx = [f'(x)]_b^a = f'(a) - f'(b)$$

である。よって ① より

$$L = f'(a) + \frac{1}{f'(a)} = \frac{\{f'(a)\}^2}{f'(a)} = \frac{e^{2a} + e^{-2a} + 2}{2(e^a - e^{-a})}$$

問 3  $L$  を  $a$  で微分して

$$L' = \frac{dL}{da} = \frac{f'(a)(\{f'(a)\}^2 - 1)}{\{f'(a)\}^2}$$

である。 $f'(a) > 0$  だから、 $L'$  の符号と  $\{f'(a)\}^2 - 1$  の符号は一致する。 $a > 0$  ゆえ  $f'(a) > 0$  であることに注意すると

$$f'(a) < 1 \text{ のとき } L' < 0, \quad f'(a) > 1 \text{ のとき } L' > 0$$

となるから、 $f'(a) = 1$  のとき  $L$  は最小値をとる。 $f'(a) = 1$  をみたく  $a$  を求めるために、 $X = e^a$  とおくと

$$f'(a) = \frac{X - X^{-1}}{2} = 1 \quad \dots\dots ②$$

$X > 1$  に注意して、②を  $X$  について解くと、 $X = 1 + \sqrt{2}$  となる。よって  $a = \log(1 + \sqrt{2})$

**3** [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 求める値を

$$S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$$

とおくと

$$S - \alpha S = 1 - \alpha^5$$

となるが、 $\alpha \neq 1$  に注意して

$$S = \frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha}$$

である。一方、

$$\alpha^5 = \left( \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

なので  $S = 0$

問 2  $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$  であることに注意すると、

$$\frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = \cos \frac{2\pi}{5}$$

である。 $X = \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$  において  $X$  の値を求める。

$$X^2 = \frac{1}{4} \left( \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 2 \right)$$

なので、 $\frac{S}{\alpha^2} = 0$  より  $X$  についての 2 次方程式

$$4X^2 + 2X - 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

を得る。2 次方程式 ① を  $X$  について解くと

$$X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

であるが、 $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$  なので  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

問 3  $S(t) = t^4 + t^3\alpha + t^2\alpha^2 + t\alpha^3 + \alpha^4$  とおくと

$$(t - \alpha)S(t) = t^5 - \alpha^5 = t^5 - 1$$

より

$$S(t) = \frac{t^5 - 1}{t - \alpha}$$

である。両辺の絶対値の 2 乗を取って

$$|S(t)|^2 = \frac{(t^5 - 1)^2}{|t - \alpha|^2}$$

であるが,

$$|t - \alpha|^2 = (t - \alpha)(t - \bar{\alpha}) = t^2 - 2t \cos \frac{2\pi}{5} + 1$$

ゆえ

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{|S(t)|^2}{(t-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^5 - 1)^2}{(t-1)^2} \frac{1}{t^2 - 2t \cos \frac{2\pi}{5} + 1} = \frac{5\sqrt{5} + 25}{2}$$

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1  $M$  が 3 以上になるという事象を  $A$  とする。3 回とも 3 以上の目が出ればよいので、

$$P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$$

問 2  $M$  が 3 になるという事象を  $B$  とする。また、 $M$  が 4 以上になるという事象を  $C$  とする。

問 1 と同様にして、

$$P(C) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{8}$$

従って、 $M$  が 3 になる確率は、

$$P(B) = P(A) - P(C) = \frac{8}{27} - \frac{1}{8} = \frac{37}{216}$$

問 3  $X$  が 6 になるという事象を  $D$  とする。求める条件付き確率は、

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)}$$

である。問 1、問 2 と同様にして、

$$P(B \cap D) = \frac{1}{6} \times \left( \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} - \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \right) = \frac{7}{216}$$

ゆえ

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{7}{216} \div \frac{37}{216} = \frac{7}{37}$$

# 令和8年度琉球大学入学者選抜 一般選抜 個別学力検査

教科・科目名 数学 甲

## 科目全体の出題の意図

「数学 甲」の問題は、記述式の問題を出題することにより、

- 1) 基本的な数学の知識や計算の技法
- 2) 正しく論証する力
- 3) 解答を論理的に記述・表現する力

についての習得度を判定することを意図して出題されます。

## 大問ごとの出題の意図

### 大問 1

定積分の計算についての習得度を問う。

### 大問 2

微分法と積分法の応用問題についての総合的な理解度と計算力を問う。

### 大問 3

複素数と極限に関する基本的な理解度と計算力を問う。

### 大問 4

確率に関する基本的な理解度と計算力を問う。