令和8年度入学試験問題（後期日程）

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注　意　事　項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 aを正の実数とする。$x>0$において

$$f(x)=e^{-ax}-\frac{a}{x}$$

とするとき，次の問いに答えよ。(50点)

問1　$f(x)$の導関数$f'(x)$を求めよ。

問2　$g(x)=x^2f'(x)$とするとき，$x>0$における$g(x)$の極値を求めよ。

問3　$f(x)$が極値をもたないようなaの値の範囲を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

1 解答欄

問1

問2

問3

2 2つの実数a，bに対して

$$I(a, b) = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{|x|} - ax - b\sqrt{|x|}e^{x^2} \right)^2 dx$$

とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$I(a, b) = I(0, b) + \dfrac{2}{3}a^2$を示せ。

問2　$I(0, b)$を求めよ。

問3　$I(a, b)$の最小値を求めよ。また，そのときのa，bの値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ とする。$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ と $\dfrac{\beta}{1+\beta}$ の大小関係を不等式を用いて表せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

問 2　x，y を実数とする。$|x+y|$ と $|x|+|y|$ の大小関係を不等式を用いて表せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

問 3　x，y を実数とする。$\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}$ と $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$ の大小関係を不等式を用いて表せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

4 aを2以上の整数とする。袋の中に白玉5個と赤玉a個が入っている。この袋から2個の玉を同時に取り出す。次の問いに答えよ。(50点)

問1　取り出した玉が2個とも赤玉である確率をaを用いて表せ。

問2　取り出した玉が2個とも同じ色である確率をaを用いて表せ。

問3　取り出した玉が2個とも同じ色であったときに，その玉の色が赤色であるという条件付き確率が$\dfrac{21}{31}$であったとする。このとき，aの値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
計	

受　験　番　号

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$f'(x) = -ae^{-ax} + \frac{a}{x^2} = \frac{a(1-x^2e^{-ax})}{x^2}$$

問 2 $g(x) = a(1-x^2e^{-ax})$ であるから

$$g'(x) = a(-2xe^{-ax} + ax^2e^{-ax}) = a^2xe^{-ax}\left(x - \frac{2}{a}\right)$$

である。増減表を書くと

x	0		$\frac{2}{a}$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	極小	↗

であるから極小値は

$$g\left(\frac{2}{a}\right) = a\left(1 - \frac{4}{a^2}e^{-2}\right) = a - \frac{4}{ae^2}$$

問 3 問 2 より $g(x)$ の最小値は $g\left(\frac{2}{a}\right)$ であり，$\lim_{x\to+0} g(x) = a > 0$ なので，$g\left(\frac{2}{a}\right) \geqq 0$ のとき $f'(x) \geqq 0$ となり $f(x)$ は極値をもたない。また，$g\left(\frac{2}{a}\right) < 0$ のときは極値をもつ。したがって

$$g\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{1}{a}\left(a + \frac{2}{e}\right)\left(a - \frac{2}{e}\right) \geqq 0$$

を解いて $a \geqq \frac{2}{e}$ が求める a の値の範囲である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$I(a,b)=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{|x|}-b\sqrt{|x|}\,e^{x^2}\right)^2dx$$
$$-2a\int_{-1}^{1}x\left(\sqrt{|x|}-b\sqrt{|x|}\,e^{x^2}\right)dx+a^2\int_{-1}^{1}x^2dx$$

となるが, 右辺の第 2 項の被積分関数は奇関数のため積分の値は 0 である。よって

$$I(a,b)=I(0,b)+a^2\int_{-1}^{1}x^2dx=I(0,b)+\frac{2}{3}a^2$$

問 2　$I(0,b)$ の被積分関数は偶関数であることに注意して

$$I(0,b)=2\int_{0}^{1}(x-2bxe^{x^2}+b^2xe^{2x^2})dx$$

となる。ここで

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{e-1}{2},\qquad \int_0^1 xe^{2x^2}dx=\frac{e^2-1}{4}$$

であるから

$$I(0,b)=\frac{e^2-1}{2}b^2-2(e-1)b+1$$

問 3　問 1 と問 2 より

$$I(a,b)=\frac{2}{3}a^2+\frac{e^2-1}{2}\left(b-\frac{2}{e+1}\right)^2-\frac{e-3}{e+1}$$

となるので, $I(a,b)$ は, $a=0,b=\dfrac{2}{e+1}$ のとき最小値 $\dfrac{3-e}{e+1}$ をとる。

3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\dfrac{\alpha}{1+\alpha} \leqq \dfrac{\beta}{1+\beta}$ を示す。$\beta-\alpha \geqq 0$ であるから,

$$\frac{\beta}{1+\beta}-\frac{\alpha}{1+\alpha}=\frac{\beta(1+\alpha)-\alpha(1+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}=\frac{\beta-\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)} \geqq 0$$

より成立する。等号が成立するのは $\alpha=\beta$ のときである。

問 2 $|x+y| \leqq |x|+|y|$ を示す。$|x+y| \geqq 0$, $|x|+|y| \geqq 0$ であるから, $(右辺)^2-(左辺)^2$ を計算して,

$$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2=|x|^2+2|xy|+|y|^2-(x^2+2xy+y^2)=2(|xy|-xy) \geqq 0$$

より成立する。等号が成立するのは $|xy|-xy=0$, すなわち $xy \geqq 0$ のときである。逆に $xy \geqq 0$ のときに, 上式の等号が成立することは直ちに確かめられる。

問 3

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|} \qquad \cdots\cdots ①$$

を示す。問 1, 問 2 の結果を使うと

$$\begin{aligned}\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} &= \frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \\ &\leqq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ②$$

が成立する。 ① で等号が成立するのは, ② の全ての不等式で等号が成立するときである。② の最初の不等式で等号が成立する条件は問 1, 問 2 より, $xy \geqq 0$ である。 次の不等式で等号が成立する条件は $|x|=0$ または $|y|=0$ である。よって等号成立には $x=0$ または $y=0$ が必要である。逆に $x=0$ または $y=0$ のときに ① の等号が成立することは直ちに確かめられる。

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　A を取り出した玉が 2 個とも赤玉であるという事象とする。

$$P(A) = \frac{{}_aC_2}{{}_{5+a}C_2} = \frac{a(a-1)}{(5+a)(4+a)}$$

問 2　B を取り出した玉が 2 個とも白玉であるという事象とする。

$$P(B) = \frac{{}_5C_2}{{}_{5+a}C_2} = \frac{5 \cdot 4}{(5+a)(4+a)} = \frac{20}{(5+a)(4+a)}$$

取り出した玉が 2 個とも同じ色である確率は $P(A \cup B)$ である。A と B は排反だから,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{{}_aC_2}{{}_{5+a}C_2} + \frac{{}_5C_2}{{}_{5+a}C_2} = \frac{a(a-1)+20}{(5+a)(4+a)}$$

問 3　取り出した玉が 2 個とも同じ色であるとき, その玉の色が赤色であるという条件付き確率は,

$$P_{A \cup B}(A) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{a(a-1)}{(5+a)(4+a)}}{\frac{a(a-1)+20}{(5+a)(4+a)}} = \frac{a(a-1)}{a(a-1)+20}$$

これが, $\dfrac{21}{31}$ と等しいので,

$$\frac{a(a-1)}{a(a-1)+20} = \frac{21}{31} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a(a-1) = 42$$

これをみたす a は, -6, 7 のいずれかであるが, a は 2 以上の整数なので $a = 7$ となる。

令和8年度琉球大学入学者選抜　一般選抜　個別学力検査

教科・科目名　数学　後期日程

科目全体の出題の意図

「数学　後期日程」の問題は，記述式の問題を出題することにより，
1）基本的な数学の知識や計算の技法
2）正しく論証する力
3）解答を論理的に記述・表現する力
についての習得度を判定することを意図して出題されます。

大問ごとの出題の意図

大問 1

微分法とその応用に関する基本的な理解度と計算力を問う。

大問 2

定積分に関する基本的な計算力と応用力を問う。

大問 3

不等式に関する計算力と，論証する力を問う。

大問 4

非復元抽出や，条件付き確率に関する基本的な理解度と計算力を問う。