令 和 7 年 度 入 学 試 験 問 題 （前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B・数C)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。

2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。

3. 解答時間は，60 分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\dfrac{1}{37}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めよ。また $\dfrac{1}{37}+\dfrac{32}{33}$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数字を求めよ。

問 2 21 の階乗 21! を素因数分解せよ。

問 3 多項式 $P(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りが $2x$, x^2-x-6 で割ったときの余りが $3x+2$ である。このとき，$P(x)$ を x^2-4x+3 で割ったときの余りを求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問1

問2

問3

2 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$f(x)$ が $x = 1$ と $x = 2$ で極値をとるとき，a と b の値を求めよ。

問 2　a と b を問 1 で求めた値とする。さらに曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = 6x - 2$ に接するとき，c の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問１

問２

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
計	

受験番号

乙 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\dfrac{1}{37} = 0.0270270\cdots = 0.\dot{0}2\dot{7}$ より 3 桁の数字が循環する。$100 = 3 \times 33 + 1$ より $\dfrac{1}{37}$ の小数第 100 位の数字は循環節の 1 番目の数字 0 である。また，小数第 101 位の数字は循環節 2 番目の数字 2 である。

$\dfrac{32}{33} = 0.9696\cdots = 0.\dot{9}\dot{6}$ より 2 桁の数字が循環する。$100 = 2 \times 50$ より $\dfrac{32}{33}$ の小数第 100 位の数字は循環節の 2 番目の数字 6，小数第 101 位の数字は循環節 1 番目の数字 9 である。

よって $\dfrac{1}{37} + \dfrac{32}{33}$ の小数第 100 位と小数第 101 位の様子は以下のようになる。

小数 第	…	100 位	101 位	…
$\dfrac{1}{37} =$	…	0	2	…
$\dfrac{32}{33} =$	…	6	9	…
$\dfrac{1}{37} + \dfrac{32}{33} =$	…	7	*	…

したがって $\dfrac{1}{37} + \dfrac{32}{33}$ を小数で表したときの小数第 100 位の数字は 7 である。

別解：$\dfrac{1}{37} + \dfrac{32}{33} = \dfrac{1217}{1221} = 0.996723996723\cdots = 0.\dot{9}9672\dot{3}$ より 6 桁の数字が循環し，$100 = 6 \times 16 + 4$ より小数第 100 位の数字は循環節の 4 番目の数字 7 である。

問 2

数	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
素因子	2	3	2^2	5	$2 \cdot 3$	7	2^3	3^2	$2 \cdot 5$	11	$2^2 \cdot 3$	13	$2 \cdot 7$

数	15	16	17	18	19	20	21
素因子	$3 \cdot 5$	2^4	17	$2 \cdot 3^2$	19	$2^2 \cdot 5$	$3 \cdot 7$

より，$21!$ の素因数分解は $21! = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ である。

別解：$\left[\dfrac{21}{2}\right] = 10$，$\left[\dfrac{21}{2^2}\right] = 5$，$\left[\dfrac{21}{2^3}\right] = 2$，$\left[\dfrac{21}{2^4}\right] = 1$ より 1〜21 に素因子 2 は $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ 個存在する.

$\left[\dfrac{21}{3}\right] = 7$，$\left[\dfrac{21}{3^2}\right] = 2$ より素因子 3 は $7 + 2 = 9$ 個，$\left[\dfrac{21}{5}\right] = 4$ より素因子 5 は 4 個，$\left[\dfrac{21}{7}\right] = 3$ より素因子 7 は 3 個，素因子 11，13，17，19 は 1 個ずつ存在する。

よって $21!$ の素因数分解は $21! = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ である。

問 3　$P(x)$ を x^2-4x+3 で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とする。

$$P(x)=(x^2-4x+3)\ Q(x)+ax+b \tag{1}$$

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ である。$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りが $2x$ なので，(1) に $x=1$ を代入すると，$a+b=P(1)=2\cdot 1$ である。$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りが $3x+2$ なので，(1) に $x=3$ を代入すると，$3a+b=P(3)=3\cdot 3+2=11$ である。$a+b=2,\ 3a+b=11$ を解くと $a=\dfrac{9}{2},\ b=-\dfrac{5}{2}$ である。よって余りは $\dfrac{9}{2}x-\dfrac{5}{2}$ である。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. $x = 1, 2$ で極値を取るので

$f'(1) = 3 + 2a + b = 0$, $f'(2) = 12 + 4a + b = 0$。これを解いて $a = -\dfrac{9}{2}$, $b = 6$ である。

問 2　問 1 より $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$. 曲線 $y = f(x)$ は直線 $y = 6x - 2$ に接するので，$f'(x) = 6$ をみたす x を求める。$3x^2 - 9x + 6 = 6$ より $x = 0, 3$ である。

直線 $y = 6x - 2$ は $(0, -2)$, $(3, 16)$ を通るので，$y = f(x)$ は点 $(0, -2)$ または $(3, 16)$ で直線 $y = 6x - 2$ に接する。点 $(0, -2)$ で接するとき $f(0) = c$ より $c = -2$.

点 $(3, 16)$ で接するとき $f(3) = 3^3 - \dfrac{9}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + c = 27 - \dfrac{81}{2} + 18 + c = 5 - \dfrac{1}{2} + c = 16$ より $c = \dfrac{23}{2}$.