令和7年度入学試験問題（後期日程）

数　学（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1　関数 $f(x)$ は，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \frac{x^2}{2} - \cos x + \sin x + 1$ を満たすとする。ただし $0 < x < 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。（50 点）

問 1　$f(x)$ の極値を求めよ。

問 2　曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ を用いて表せ。

問 2　等式 $\sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin\dfrac{2\pi}{5}$ を利用して，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ。

問 3　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=\sin 2x$，$y=\sin 3x$，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 数列 $\{a_n\}$ を，条件 $a_1=2,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ によって定める。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ を 5 で割った余りを求めよ。

問 2　すべての $n \geqq 1$ に対して，a_n を 5 で割った余りと a_{n+k} を 5 で割った余りが等しくなるような最小の自然数 k を求めよ。

問 3　a_{2025} を 5 で割った余りを求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 解答欄

問1

問2

問3

4 数直線上の4点1, 2, 3, 4を動く点Pが1の位置にある。サイコロを投げて，1, 2, 3, 4の目が出たらその目が表す数字の位置に移動し，5, 6の目が出たら移動はせず，現在の位置にとどまる。例えば，1回目に3の目，2回目に5の目が出たとき，その2回目の試行の後，点Pは3の位置にある。この試行を繰り返し，n回目の試行の後に，点Pが1の位置にある確率をp_nとする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　p_1およびp_2を求めよ。

問2　p_{n+1}をp_nの式で表せ。

問3　p_nの一般項を求めよ。また，$\sum_{k=1}^{n} p_k$を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
計	

受　験　番　号

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{2} - \cos x + \sin x + 1$ の両辺を x で微分する。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + \sin x + \cos x & (1)\\
f'(x) &= 1 + \cos x - \sin x & (2)\\
f''(x) &= -\sin x - \cos x & (3)
\end{aligned}
$$

(2) に三角関数の合成を用いると $f'(x) = 1 - \sqrt{2}\,\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

$f'(x) = 0$ とすると $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $0 < x < 2\pi$ の範囲でこれをみたす x は $x = \frac{\pi}{2}$ と π. $0 < x < 2\pi$ の範囲の増減表を作ると

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+1$	$\searrow$	$\pi - 1$	$\nearrow$	

よって極値は, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき極大値 $\frac{\pi}{2} + 1$, $x = \pi$ のとき極小値 $\pi - 1$ である。

問 2 $f''(x) = 0$ とすると, (3) より $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. $0 < x < 2\pi$ の範囲でこれをみたす x は $x = \frac{3}{4}\pi$ と $\frac{7}{4}\pi$. $0 < x < 2\pi$ の範囲の増減表を作ると

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		上に凸	$\frac{3}{4}\pi$	下に凸	$\frac{7}{4}\pi$	上に凸	

$x = \frac{3}{4}\pi$ および $x = \frac{7}{4}\pi$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化するので, $y = f(x)$ の変曲点は, $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$ と $\left(\frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$ の 2 点である。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$\sin 3\theta = \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta(3-4\sin^2\theta).$

問 2　問 1 で $\theta = \frac{\pi}{5}$ とすると, $\sin\frac{3\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}\ (3-4\sin^2\frac{\pi}{5}) = \sin\frac{\pi}{5}\ (4\cos^2\frac{\pi}{5}-1)$

$\sin\frac{3\pi}{5} = \sin\frac{2\pi}{5} = 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$ なので $\sin\frac{\pi}{5} \neq 0$ で約分して

$$4\cos^2\frac{\pi}{5} - 1 = 2\cos\frac{\pi}{5} \ \leftrightarrow\ 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0.$$

$\cos\frac{\pi}{5} > 0$ より $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ である。

問 3　$0 < x < \frac{\pi}{2}$ における $y = \sin 2x$ と $y = \sin 3x$ の交点の x 座標 $\alpha = \frac{\pi}{5}$。求める面積

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\alpha} (\sin 3x - \sin 2x)dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sin 3x)dx \\
&= \left[-\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\alpha} + \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3}\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{3}\ (\cos 3\alpha - 1) + \frac{1}{2}\ (\cos 2\alpha - 1) - \frac{1}{2}\ (-1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{3}\ (0 - \cos 3\alpha) \\
&= -\frac{2}{3}\cos 3\alpha + \cos 2\alpha + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$\cos 3\alpha = -\cos 2\alpha,\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \overset{問 2}{=} \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ である。よって

$$S = \frac{5}{3}\cos 2\alpha + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ (5\frac{\sqrt{5}-1}{4} + 1) = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}$$

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　漸化式を使って順に計算すると，$a_3 = a_2 + a_1 = 3$, $a_4 = a_3 + a_2 = 4$, $a_5 = a_4 + a_3 = 7$, $a_6 = a_5 + a_4 = 11$, $a_7 = a_6 + a_5 = 18$, $a_8 = a_7 + a_6 = 29$ である。よって，これらを 5 で割った余りはそれぞれ $3, 4, 2, 1, 3, 4$ である。

問 2　問 1 で計算したように，$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ を 5 で割った余りはそれぞれ $2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4$ である。まず，a_1, a_2, a_3, a_4 の余りは相異なるので，k は 3 以下ではない。次に，a_5 と a_1, a_6 と a_2, a_7 と a_3, a_8 と a_4 はそれぞれ余りが等しい。一般に a_{n+4} と a_n, a_{n+5} と a_{n+1} を 5 で割った余りがそれぞれ等しいと仮定すると，$a_{n+6} = a_{n+5} + a_{n+4}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ なので，a_{n+6} と a_{n+2} を 5 で割った余りも等しい。従って帰納的に，すべての $n \geqq 1$ に対して，a_n と a_{n+4} を 5 で割った余りは等しいことがわかる。つまり，求める k は 4 である。

問 3　まず，$2025 = 1 + 4 \cdot 506$ である。問 2 から，$a_{2025}, a_{2021}, a_{2017}, a_{2013}, \cdots, a_9, a_5, a_1 (= 2)$ を 5 で割った余りはすべて等しいことがわかる。したがって，a_{2025} を 5 で割った余りは 2 である。

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　1 回目の試行の後に点 P が 1 の位置にあるのは 1 回目のサイコロの目が 1, 5, 6 のときだから $p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。

2 回目の試行の後に点 P が 1 の位置にあるのは, (i) 1 回目の試行の後に点 P が 1 の位置のときは 2 回目のサイコロの目が 1, 5, 6 のときであり, (ii) 1 回目の試行の後に点 P が 1 以外の位置のときは 2 回目のサイコロの目が 1 のときである。従って

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{3}{6} + (1 - p_1) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

問 2　$n+1$ 回目の試行の後に点 P が 1 の位置にあるのは, (i) n 回目の試行の後に点 P が 1 の位置のときは $n+1$ 回目のサイコロの目が 1, 5, 6 のときであり, (ii) n 回目の試行の後に点 P が 1 以外の位置のときは $n+1$ 回目のサイコロの目が 1 のときである。したがって

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{3}{6} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\, p_n + \frac{1}{6}.$$

問 3　$\alpha = \frac{1}{3}\,\alpha + \frac{1}{6}$ を解いて $\alpha = \frac{1}{4}$. よって,

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

$q_n = p_n - \frac{1}{4}$ とすると, $q_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ なので,

$\{q_n\}$ は初項 $\frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから, $q_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

したがって, $p_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$ である。また,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} p_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} + \frac{n}{4} \\ &= \frac{3}{8}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + \frac{n}{4}\end{aligned}$$