令 和 6 年 度 入 学 試 験 問 題 （前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，60 分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　2024 の正の約数の総和を求めよ。

問 2　4 乗すると 1 となる複素数をすべて求めよ。

問 3　大きさ 1 のベクトルが 2 つあり，そのなす角は 75° である。このとき，この 2 つのベクトルの内積と $\frac{1}{4}$ はどちらが大きいか答えよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 xy 平面上で，中心が点 P$(0, 2)$で半径が 1 の円と，放物線 $y=x^2+a$（a は定数）が，異なる 2 点で接している。ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点における円の接線と放物線の接線が一致することであり，その点を接点という。次の問いに答えよ。（50 点）

問 1　a の値を求めよ。

問 2　2 つの接点を A，B とする。ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。線分 PA，PB と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問1

問2

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
小計	

受 験 番 号

乙 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ であることから約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+11)(1+23) = 15 \times 12 \times 24 = 4320$$

問 2 $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$ より, $x = \pm 1, \pm i$

問 3

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

2 つのベクトルを $\vec{a}, \vec{b}$ とすると, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ である。$\vec{a} \cdot \vec{b} > \dfrac{1}{4}$ を示す。両辺を二乗して比べると, $\dfrac{7}{4} > \sqrt{3}$ を示せばよいが, これは $49 > 3 \times 16$ であるから確かに正しい。

$\boxed{\mathbf{2}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　円の方程式は $x^2 + (y-2)^2 = 1$ である。円と放物線の接点において, 放物線の方程式から $x^2 = y - a$ であり, これを円の方程式に代入して $y - a + (y-2)^2 = 1$, つまり $y^2 - 3y + 3 - a = 0$ を得る。2 つの接点の y 座標は等しいから, この 2 次方程式は重解をもち, 判別式は $9 - 4(3-a) = 0$ を満たすので, $a = \dfrac{3}{4}$ である。

問 2　放物線は $y = x^2 + \dfrac{3}{4}$, 接点の座標は $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ である。直線 $y = \dfrac{3}{2}$ と放物線が囲む部分の面積 S は

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{2} - \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\right) dx = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - x^2\right) dx = 2\left[\frac{3}{4}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

求める面積 T は, 面積 S と底辺 $\sqrt{3}$, 高さ $\dfrac{1}{2}$ の三角形 PAB の面積の和なので

$$T = S + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$