令和６年度入学試験問題（前期日程）

# 数　学　甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

**注　意　事　項**

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

| 受　験　番　号 |
| --- |
| |

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

**1** $a$ を正の実数とする。曲線 $y=\log x$ の点 $(a,\ \log a)$ における接線を $l_1$，点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線を $l_2$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　接線 $l_1$ の方程式を求めよ。

問 2　$l_1$ と $l_2$ の交点の座標を求めよ。

問 3　曲線 $y=\log x$ と直線 $l_1$，$l_2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$\dfrac{S(a)}{a}$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 問 3 | |
| 小計 | |

**1** 解答欄

問1

問2

問3

$\boxed{2}$ $a$を実数とし，$f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+a$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　曲線$y=f(x)$の点$(t,\ f(t))$における接線の方程式を求めよ。

問2　原点Oから曲線$y=f(x)$にちょうど2本の接線が引けるような$a$の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | |
| 小計 | |

## 2 解答欄

問1

問2

**3** $z$ を複素数で $|z-1|=\sqrt{2}$ をみたすものとし，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\left|\dfrac{1}{z}+1\right|^2=2$ であることを示せ。

問 2 $|w-2||w+2|=4$ であることを示せ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 小計 | |

**3** 解答欄

問 1

問 2

**4** 白玉１個が入った袋Ａと，白玉２個と赤玉２個が入った袋Ｂがある。袋Ｂから無作為に玉を１個取り出し，袋Ａに入っている玉と交換する。この試行を繰り返す。$n$ 回試行を繰り返したあとに，袋Ａに入っている玉が白である確率を $p_n$ とする。このとき，次の問いに答えよ。（50 点）

問１　$p_1$ を求めよ。

問２　$p_{n+1}$ を $p_n$ の式で表せ。

問３　$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問１ | |
| 問２ | |
| 問３ | |
| 小計 | |

**4** **解答欄**

問 1

問 2

問 3

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 数　　学 甲 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 小計 | |

| 受 験 番 号 |
|---|
| |

甲　解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$y' = \dfrac{1}{x}$ であるから, 求める方程式は

$$y = \frac{1}{a}(x-a) + \log a = \frac{1}{a}x - 1 + \log a$$

問 2　$l_2$ の方程式は

$$y = \frac{1}{2a}x - 1 + \log 2a = \frac{1}{2a}x - 1 + \log a + \log 2$$

$l_1$ と $l_2$ の連立方程式を解くと

$$\begin{aligned}
&0 = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right)x - \log 2 \\
&x = 2a\log 2 \\
&y = \frac{1}{a}\cdot 2a\log 2 - 1 + \log a \\
&\quad = 2\log 2 - 1 + \log a
\end{aligned}$$

よって, 交点の座標は $(2a\log 2, 2\log 2 - 1 + \log a)$

問 3

$$\begin{aligned}
S(a) &= \int_a^{2a\log 2}\left(\frac{1}{a}x - 1 + \log a - \log x\right)\,dx \\
&+ \int_{2a\log 2}^{2a}\left(\frac{1}{2a}x - 1 + \log a - \log x + \log 2\right)\,dx \\
&= \int_a^{2a}(-1 + \log a - \log x)\,dx + \int_a^{2a\log 2}\frac{1}{a}x\,dx + \int_{2a\log 2}^{2a}\left(\frac{1}{2a}x + \log 2\right)\,dx \\
&= a(-1+\log a) - [x\log x - x]_a^{2a} \\
&+ \left[\frac{1}{2a}x^2\right]_a^{2a\log 2} + \left[\frac{1}{4a}x^2\right]_{2a\log 2}^{2a} + (2a - 2a\log 2)\log 2 \\
&= a(-1+\log a) - (2a\log 2 + 2a\log a - 2a - a\log a + a) \\
&+ \frac{1}{2a}\left(4a^2(\log 2)^2 - a^2\right) + \frac{1}{4a}\left(4a^2 - 4a^2(\log 2)^2\right) + (2a - 2a\log 2)\log 2 \\
&= -a + a\log a - 2a\log 2 - a\log a + a \\
&+ 2a(\log 2)^2 - \frac{a}{2} + a - a(\log 2)^2 + 2a\log 2 - 2a(\log 2)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - (\log 2)^2\right)a \\
\frac{S(a)}{a} &= \frac{1}{2} - (\log 2)^2
\end{aligned}$$

**2** [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$y' = 2x + \dfrac{1}{x^2}$ なので, 接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(2t + \frac{1}{t^2}\right)\left(x - t\right) + t^2 - \frac{1}{t} + a \\ &= \left(2t + \frac{1}{t^2}\right)x - t^2 - \frac{2}{t} + a \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

問 2　① が原点を通るので，$0 = -t^2 - \dfrac{2}{t} + a$　$\therefore t^2 + \dfrac{2}{t} = a \cdots\cdots ②$

② がちょうど 2 つの解をもつように，$a$ の値を定めればよい。

$g(t) = t^2 + \dfrac{2}{t}$ とおくと，$g'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{2(t^3-1)}{t^2}$

増減表

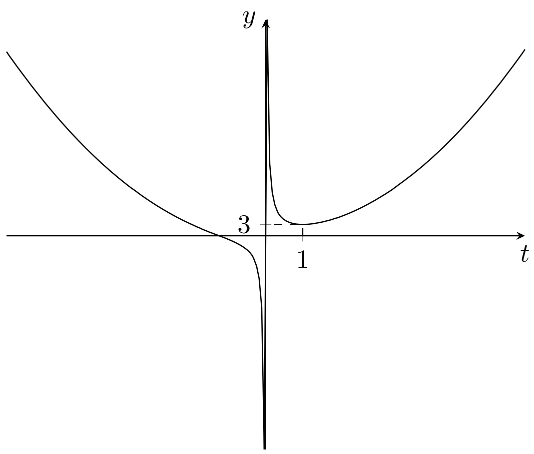
| $t$ | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $-$ | ／ | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(t)$ | ↘ | ／ | ↘ | 3 | ↗ |

$t = 1$ で極小，極小値は 3

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+0}\left(t^2 + \frac{2}{t}\right) &= \infty \\ \lim_{t\to-0}\left(t^2 + \frac{2}{t}\right) &= -\infty \\ \lim_{t\to\pm\infty}\left(t^2 + \frac{2}{t}\right) &= \infty \end{aligned}$$

に注意すると，$y = g(t)$ のグラフは下のようになる。

グラフ




このグラフと直線 $y = a$ がちょうど 2 個の交点をもつのは，$a = 3$ のときである。

**3** [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned} 2 &= |z-1|^2 \\ &= (z-1)(\bar{z}-1) \\ &= |z|^2 - z - \bar{z} + 1 \end{aligned}$$

ゆえに

$$1 + z + \bar{z} = |z|^2$$

従って

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z}+1\right|^2 &= \left(\frac{1}{z}+1\right)\left(\frac{1}{\bar{z}}+1\right) \\ &= \left(\frac{1+z}{z}\right)\left(\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}}\right) \\ &= \frac{(1+z)(1+\bar{z})}{|z|^2} \\ &= \frac{1+z+\bar{z}+|z|^2}{|z|^2} \\ &= \frac{|z|^2+|z|^2}{|z|^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

問 2

$$\begin{aligned} |w-2||w+2| &= \left|z+\frac{1}{z}-2\right|\left|z+\frac{1}{z}+2\right| \\ &= \left|\frac{z^2+1-2z}{z}\right|\left|\frac{z^2+1+2z}{z}\right| \\ &= \left|\frac{(z-1)^2}{z}\right|\left|\frac{(z+1)^2}{z}\right| \\ &= \left|\frac{(z-1)(z+1)}{z}\right|^2 \\ &= \left|(z-1)\left(1+\frac{1}{z}\right)\right|^2 \\ &= |z-1|^2\left|1+\frac{1}{z}\right|^2 \\ &= 2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$p_1$ は, 最初の試行で白球を取り出す確率に等しいから, $p_1 = \dfrac{1}{2}$

問 2　$n$ 回目の試行のあと, 袋 A に白玉があるという事象を $A_n$ とする。

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n)$$

ここで, $\bar{A}_n$ は $A_n$ の余事象を表す。 確率の乗法定理によって,

$$P(A_{n+1} \cap A_n) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) = \frac{1}{2} \times p_n$$

$P(\bar{A}_n) = 1 - P(A_n) = 1 - p_n$ であることに注意すると,

$$P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) = P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})P(\bar{A}_n) = \frac{3}{4}(1 - p_n)$$

従って,

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}(1 - p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}$$

を満たす。

問 3　(2) より

$$p_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{3}{5}\right)$$

となるので

$$p_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{5} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{3}{5}$$

従って,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{5}$$