令和6年度入学試験問題（後期日程）

数　学（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 $0<a<1$ とし，$f(x)=x^a\log x\,(x>0)$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

問2　曲線 $y=f(x)$ の変曲点を求めよ。

問3　曲線 $y=f(x)$ の変曲点における接線の y 切片を $g(a)$ とする。$g(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 $a>0$ とする。曲線 $y=\sin x\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を D とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　D の面積を求めよ。

問 2　曲線 $y=\sin x\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y=a\cos x\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ の交点の x 座標を t とする。$\cos t$ および $\sin t$ を a を用いて表せ。

問 3　D は曲線 $y=a\cos x\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ によって図形 D_1，D_2 に分割されるとする。D_1 と D_2 の面積が等しいとき，a の値を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

$\boxed{2}$ **解答欄**

問 1

問 2

問 3

3 数列$\{a_n\}$を数直線上の点列とし，$a_1=1$，$a_2=2$，a_nとa_{n+1}を$1:2$に内分する点をa_{n+2} ($n=1, 2, \cdots\cdots$) とする。次の問いに答えよ。（50点）

問１　$b_n=a_{n+1}-a_n$とおくことにより数列$\{b_n\}$を定める。b_{n+1}をb_nの式で表せ。

問２　一般項b_nをnの式で表せ。

問３　一般項a_nをnの式で表せ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問１	
問２	
問３	
小計	

3 解答欄

問1

問2

問3

4 当たり３本を含む９本のくじがある。９人が順にこのくじを１本ずつ引く。引いたくじは，もとに戻さないものとする。次の問いに答えよ。（50 点）

問１　２番目の人が当たりを引く確率を求めよ。

問２　３番目の人が，２本目の当たりを引く確率を求めよ。

問３　２本目の当たりを引く確率が最も大きいのは何番目にくじを引く人か答え，そのときの確率を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問１	
問２	
問３	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

<table>
<tr><td colspan="2">採　点　欄</td></tr>
<tr><td colspan="2">数　　学</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>小
計</td><td></td></tr>
</table>

受　験　番　号

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $f(x)$ の導関数は, $f'(x) = x^{a-1}(a\log x + 1)$ となる。従って, $f(x)$ は $x = e^{-\frac{1}{a}}$ で極小値をとる。その値は $f(e^{-\frac{1}{a}}) = -\frac{1}{ae}$ である。

問 2 $f(x)$ の第 2 次導関数は,

$$f''(x) = x^{a-2}\{-a(1-a)\log x + 2a - 1\} = a(1-a)x^{a-2}\left(-\log x - \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right)$$

従って, $x = e^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}} = e^{\frac{2a-1}{a(1-a)}}$ で変曲点をとる。

$$f(e^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}}) = e^{-2+\frac{1}{1-a}} \cdot \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right) = e^{\frac{2a-1}{1-a}}\frac{2a-1}{a(1-a)}$$

$y = f(x)$ の変曲点は,

$$\left(e^{\frac{2a-1}{a(1-a)}}, e^{\frac{2a-1}{1-a}}\frac{2a-1}{a(1-a)}\right)$$

である。

問 3 $c = e^{-\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}}$ とする。$y = f(x)$ の変曲点 $(c, f(c))$ における接線の方程式は,

$$y = f'(c)(x-c) + f(c) = e^{-2+\frac{1}{a}}\left(-1 + \frac{1}{1-a}\right)x + e^{-2+\frac{1}{1-a}}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

従って,

$$g(a) = e^{-2+\frac{1}{1-a}}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

となる。$g(a)$ の導関数は,

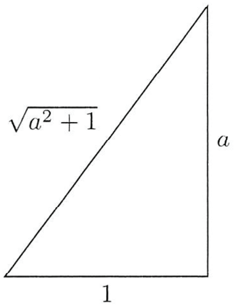
$$g'(a) = \frac{e^{-2+\frac{1}{1-a}}}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1-a}\right) = \frac{e^{-2+\frac{1}{1-a}}}{a} \cdot \frac{1-2a}{a(1-a)}$$

従って, $g(a)$ は $a = \frac{1}{2}$ で最大値 $g(\frac{1}{2}) = -1$ をとる。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

問 2 $\sin t = a\cos t$ より，$\tan t = a$ となる。$\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $\sin t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$



問 3 問 1 の結果を使うと，D_1, D_2 の面積は $\dfrac{1}{2}$ である。これより，

$$\int_t^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a\cos x)dx = \frac{1}{2} \cdots\cdots ①$$

$$\begin{aligned} ① \text{の左辺} &= \Big[-\cos x - a\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -a + \cos t + a\sin t \\ &= -a + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}} \\ &= -a + \sqrt{a^2+1} \end{aligned}$$

① に代入すると，$-a + \sqrt{a^2+1} = \dfrac{1}{2}$, さらに $a^2+1 = \left(a + \dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形して，$a = \dfrac{3}{4}$

$\boxed{3}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1 $a_{n+2} = \dfrac{2a_n + a_{n+1}}{3} \cdots\cdots$ ① であるから，

$$\begin{aligned} b_{n+1} =& a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2a_n + a_{n+1}}{3} - a_{n+1} \\ =& -\frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) = -\frac{2}{3} b_n \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

問 2 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ と ① より，

$$b_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} b_1 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

問 3 $n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n =& a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} \\ =& \frac{8}{5} + (-1)^n \frac{2^{n-1}}{5 \cdot 3^{n-2}} \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

② は $n = 1$ のときも成り立つ。

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　当たりを○，はずれを×と書く。（○，○）と（×，○）の確率の和だから，

$$\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{3}$$

問 2　（○，×，○）と（×，○，○）の確率の和だから，

$$2\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$$

問 3　k 番目の人が 2 本目の当たりを引く確率を P_k とする。3 個の○，6 個の×を一列に並べることを考える。「1〜$(k-1)$ 番目のただ一つが○」かつ「k 番目が○」かつ「$(k+1)$〜9 番目のただ一つが○」という事象を考える。この事象数を全事象数で割ったものが P_k である。

$$\therefore P_k=\frac{(k-1)(9-k)}{{}_9C_3}$$

$(k-1)(9-k)=-(k-5)^2+16$ だから，5 番目にくじを引く人の $P_5=\dfrac{4}{21}$ が最も大きい。