令和5年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，60分である。

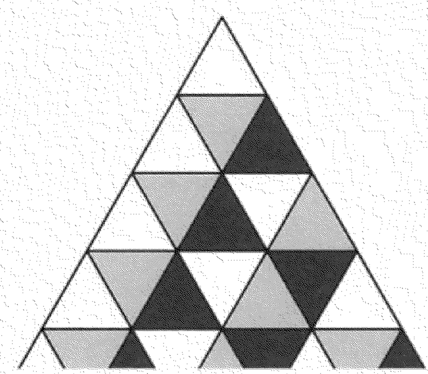
受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$2023x + 374y = 17$ を満たす整数 x，y の組を 1 つ求めよ。

問 2　下図のように，同じ大きさの正三角形を並べて大きい正三角形を構築し，上から順番に 1 段目，2 段目，3 段目，…… と呼ぶことにして，100 段目まで並べる。さらに，下図のように，各段の小三角形を左から白色，灰色，黒色の順に繰り返し塗ることにする。
このとき，100 段目までの小三角形の総数と 100 段目までの白色の小三角形の個数を求めよ。



(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 $f(x)=x^3+x^2$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$f(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

問2　$0<a<1$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ によって囲まれた2つの部分の面積の和 $S(a)$ を求めよ。

問3　$0<a<1$ の範囲で $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

[2] **解答欄**

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
小計	

受験番号

乙 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 ユークリッドの互除法を実行すると, 次になる.

$$2023 = 374 \times 5 + 153, \qquad 374 = 153 \times 2 + 68, \qquad 153 = 68 \times 2 + 17, \quad 68 = 17 \times 4$$

これより,

$$\begin{aligned} 17 &= 153 - 68 \times 2 = 153 - (374 - 153 \times 2) \times 2 = 153 \times 5 - 374 \times 2 \\ &= (2023 - 374 \times 5) \times 5 - 374 \times 2 = 2023 \times 5 - 374 \times 27 \end{aligned}$$

したがって, $x = 5$, $y = -27$ が 1 つの解である.

問 2 小三角形の数は, 1 段下がると 2 個増える. よって, k 段目の個数は, $2k-1$ 個であり 100 段までの総数は,

$$\sum_{k=1}^{100}(2k-1) = 100^2 = 10000$$

白色の小三角形の個数は, 3 段ごとに分けて考える.

$(3k-2)$ 段目には, $2(3k-2)-1 = 6k-5$ 個の三角形がある. この中で白色の現れる場所は, 左端から順に

$$3 \cdot 0 + 1, \quad 3 \cdot 1 + 1, \quad 3 \cdot 2 + 1, \cdots\cdots, \ 3 \cdot (2k-2) + 1$$

となる. すなわち, この段には, $2k-1$ 個の白色小三角形がある. 同様に, $(3k-1)$ 段目には, $6k-3$ 個の三角形があり, 白色が現れる場所は上と同じ

$$3 \cdot 0 + 1, \quad 3 \cdot 1 + 1, \quad 3 \cdot 2 + 1, \cdots\cdots, \ 3 \cdot (2k-2) + 1$$

となって, この段の白色小三角形の個数も $2k-1$ 個である. $3k$ 段目には, $6k-1$ 個の三角形があるので,

$$3 \cdot 0 + 1, \quad 3 \cdot 1 + 1, \quad 3 \cdot 2 + 1, \cdots\cdots, \ 3 \cdot (2k-2) + 1, \quad 3 \cdot (2k-1) + 1$$

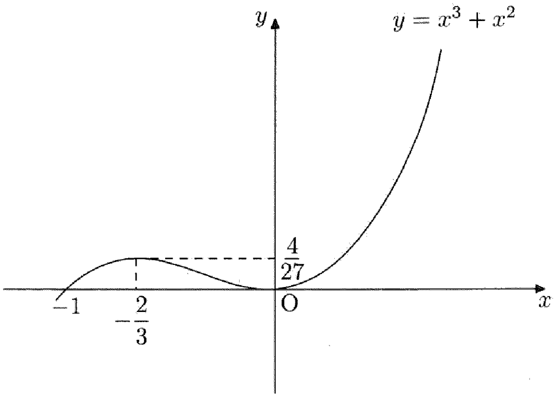
の場所に白色が現れ, この段には $2k$ 個の白色小三角形がある. よって, $(3k-2)$ 段, $(3k-1)$ 段, $3k$ 段の連続する 3 段にある白色小三角形の数は, $6k-2$ 個である. 上の考察から, $100 = (3 \cdot 34 - 2)$ 段目には, 白色小三角形が $2 \cdot 34 - 1 = 67$ 個ある. よって, 求める白色小三角形の個数の合計は,

$$\sum_{k=1}^{33}(6k-2) + 67 = 6 \times \frac{33 \cdot 34}{2} - 2 \cdot 33 + 67 = 3367$$

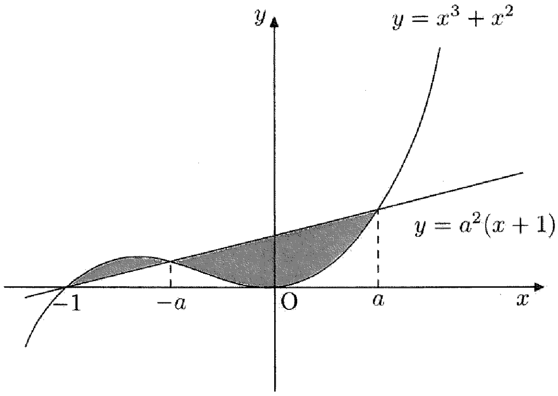
2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$ で, 増減表は次のようになり, グラフの概形は下図である.

x		$-\frac{2}{3}$		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{4}{27}$	↘	極小 0	↗



問 2　方程式 $x^3 + x^2 = a^2(x+1)$ の解は, $x = -1, \pm a$ なので, 曲線と直線の交点は, $(-1, 0)$, $(-a, -a^3 + a^2)$, $(a, a^3 + a^2)$ の 3 点である. $0 < a < 1$ なので, 求める面積は図の灰色の部分の面積となり, 下の積分計算で求まる.



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^{-a} (x^3 + x^2 - a^2x - a^2)\,dx + \int_{-a}^{a} (a^2x + a^2 - x^3 - x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{a^2}{2}x^2 - a^2x\right]_{-1}^{-a} + \left[\frac{a^2}{2}x^2 + a^2x - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} \\ &= -\frac{1}{4}a^4 + 2a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

問 3

$$S'(a) = -a^3 + 6a^2 - a = -a(a^2 - 6a + 1)$$

$a^2 - 6a + 1 = 0$ となるのは, $a = 3 \pm 2\sqrt{2}$. $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1 < 3 + 2\sqrt{2}$ なので, $0 < a < 1$ の範囲での増減表は次のようになる．よって, $a = 3 - 2\sqrt{2}$ で最小値をとる．

a	0		$3-2\sqrt{2}$		1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	