# 令和5年度入学試験問題（前期日程）

# 数　学　甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

**注　意　事　項**

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

| 受　験　番　号 |
|---|
| |

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

**1** $a>0$ とする。座標平面で関数 $y=\dfrac{1}{x^a}$ のグラフ上の点 $(1,1)$ における接線が $x$ 軸と交わる点を A，$y$ 軸と交わる点を B とし，原点を O とする。三角形 OAB の面積を $S(a)$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$S(a)$ を求めよ。

問2　$S(a)$ の最小値とそのときの $a$ の値を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | |
| 小計 | |

## 1 解答欄

問 1

問 2

**2** $a$を実数とし，$f(x)=xe^{-|x|}$，$g(x)=ax$とおく。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$f(x)$の増減を調べ，$y=f(x)$のグラフの概形をかけ。ただし，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$は証明なしに用いてよい。

問2　$0<a<1$のとき，曲線$y=f(x)$と直線$y=g(x)$で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | |
| 小計 | |

## 2 解答欄

問 1

問 2

**3** 空間内に4点O$(0,0,0)$，A$(1,0,0)$，B$(0,1,0)$，C$(0,0,1)$をとる。時刻$t=0$から$t=1$まで3点P，Q，Rは次のように動くものとする。

- $t=0$に3点は点Oを出発する。
- 動点Pは線分OA上を速さ1で点Aに向かって動く。
- 動点Qは線分OB上を速さ$\frac{1}{2}$で点Bに向かって動く。
- 動点Rは線分OC上を速さ2で動く。$t=\frac{1}{2}$までは点Cへ向かって動き，$t=\frac{1}{2}$以後は点Cから点Oに向かって動く。

時刻$t$における三角形PQRの面積を$S(t)$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$S(t)$を求めよ。

問2　$S(t)$を最大にする$t$の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | |
| 小計 | |

3 解答欄

問 1

問 2

**4** 1個のさいころを6の目が2回出るまで投げ続ける。$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して $p_k$ を $k+1$ 回目に2回目の6の目が出る確率とするとき，次の問いに答えよ。(50点)

問1　$p_k$ を求めよ。

問2　$p_k$ を最大にする $k$ の値を求めよ。

問3　$S_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | |
| 問3 | |
| 小計 | |

**4** 解答欄

問 1

問 2

問 3

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 数　　学 甲 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 小計 | |

| 受 験 番 号 |
|---|
| |

甲 解答例

**1** [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $y = x^{-a}$ なので, $y' = -ax^{-a-1}$. 従って, $(1, 1)$ での接線の方程式は,

$$y = -a(x-1) + 1.$$

これより, $\mathrm{A}\left(\dfrac{a+1}{a}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, a+1)$ を得る. よって,

$$S(a) = \frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = \frac{(a+1)^2}{2a}.$$

問 2

$$S'(a) = \frac{1}{2}\frac{2(a+1)a-(a+1)^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{(a+1)(a-1)}{a^2}$$

なので, $S(a)$ の増減表は次のようになる.

| $a$ | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $S(a)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

よって最小値は, $S(1) = 2$.

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$f(-x) = -f(x)$ なので, $y = f(x)$ のグラフは, 原点に対して対称である.

$x \geqq 0$ のとき,

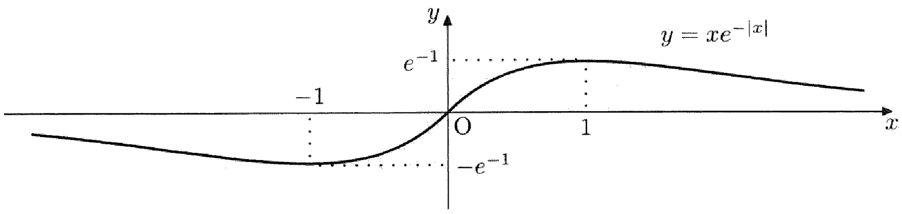
$$f'(x) = \left(xe^{-x}\right)' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$x \leqq 0$ のとき,

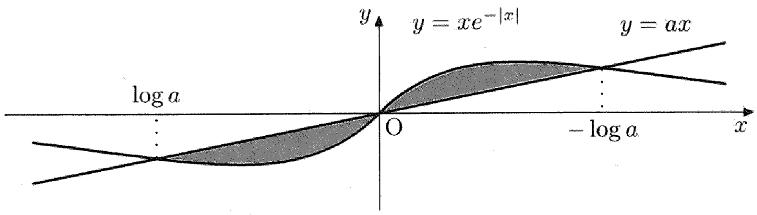
$$f'(x) = (xe^{x})' = e^{x} + xe^{x} = (1+x)e^{x}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになり, グラフは下図のようになる.

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 極小 | ↗ | 極大 | ↘ |




問 2　$x \geqq 0$ のとき, $xe^{-x} = ax$ を解くと, $x = 0$, $x = -\log a$ を得る. $0 < a < 1$ より, $-\log a > 0$ であり, 原点に対するグラフの対称性から, 求める面積は下図の灰色の部分である.




対称性を利用すると, 求める面積は,

$$2\int_0^{-\log a} \left(xe^{-x} - ax\right) dx = 2\left[-xe^{-x} - e^{-x} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^{-\log a}$$
$$= 2\left\{a\log a - a - \frac{a}{2}(\log a)^2 + 1\right\}$$

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　時刻 $t$ での P, Q, R の座標は次で与えられる。

$$\mathrm{P}(t,0,0),\qquad Q\left(0,\frac{t}{2},0\right),\qquad \begin{cases} \mathrm{R}(0,0,2t) & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ \mathrm{R}(0,0,2-2t) & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

△ PQR の面積は,

$$\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}\cdot\sin\angle\mathrm{P} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}$$

で与えられるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(-t,\frac{t}{2},0\right),\qquad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{cases} (-t,0,2t) & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ (-t,0,2-2t) & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

を上の式に代入する.

$$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\text{のとき},\quad S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(t^2+\frac{t^2}{4}\right)(t^2+4t^2)-(t^2)^2} = \frac{\sqrt{21}\,t^2}{4}$$

$$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\text{ のとき},\quad S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(t^2+\frac{t^2}{4}\right)\{t^2+4(1-t)^2\}-(t^2)^2}$$
$$= \frac{t}{4}\sqrt{21t^2-40t+20}$$

問 2　問 1 の結果より, $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ では, $S(t)$ は増加するので, この範囲での最大値は $\frac{\sqrt{21}}{16}$.
$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき, $S(t) \geqq 0$ なので, $S(t)$ の大小関係と $16S(t)^2$ の大小関係は一致する.

$$f(t) = 16S(t)^2 = t^2(21t^2-40t+20) = 21t^4-40t^3+20t^2$$

とおく.

$$f'(t) = 84t^3-120t^2+40t = 4t(21t^2-30t+10)$$

となる. $f'(t) = 0$ となる $t$ は, $t = 0, \frac{15\pm\sqrt{15}}{21}$ である. $\sqrt{15} < 4$ より,
$\frac{1}{2} < \frac{15-\sqrt{15}}{21} < \frac{15+\sqrt{15}}{21} < 1$ であり, 増減表は次のようになる.

| $t$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{15-\sqrt{15}}{21}$ | | $\frac{15+\sqrt{15}}{21}$ | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(t)$ | | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ | |

$0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ の時の考察と上の増減表より,

$$S(1) = \frac{4}{16} < S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{16} < S\left(\frac{15-\sqrt{15}}{21}\right)$$

を得るので, $S(t)$ は $t = \frac{15-\sqrt{15}}{21}$ のとき最大値を取る.

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$k$ 回目までに 6 が 1 回, それ以外が $k-1$ 回出た後, $k+1$ 回目に 6 が出る確率だから,

$$p_k = {}_kC_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right) = k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

問 2

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(k+1)\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(\frac{1}{6}\right)^2}{k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5(k+1)}{6k}$$

より, $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$ は $6k < 5(k+1)$ と同じになり, $k < 5$. $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$ は $6k > 5(k+1)$ と同じになり, $k > 5$. よって, $p_1 < p_2 < \cdots < p_5 = p_6 > p_7 > p_8 \cdots$ となるので, $k=5$, $k=6$ で $p_k$ は最大値.

問 3

$$S_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left\{1 + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$$
$$\frac{5}{6}S_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left\{1\cdot\frac{5}{6} + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + n\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

上の式から下の式を両辺で引き算して等比数列の和の公式を利用すると,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{6}\left\{1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - n\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\} \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}} - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{aligned}$$