令和5年度入学試験問題（後期日程）

数　学（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注　意　事　項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

$\boxed{1}$ 関数 $y=x\sqrt{9-x^2}$ に対して，次の問いに答えよ。（50 点）

問 1　増減を調べてこの関数のグラフの概形をかけ。

問 2　この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ とし，$f(x)=F(3x)-F(x)$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 $f'(x)$を求めよ。

問2 $x \geqq 0$ の範囲で，$f(x)$の最大値を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採 点 欄	
問1	
問2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

3 自然数からなる２つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。(50 点)

問１　すべての自然数 n に対して，a_n は奇数，b_n は偶数であることを示せ。

問２　すべての自然数 n に対して，

$$1+2+3+\cdots\cdots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2} = 1+3+5+\cdots\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)$$

が成立することを示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問１	
問２	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

4 赤球が1個，白球が2個入った袋から球を1個取り出して，その色を見てから袋に戻すという試行を，白球が2回続けて出るまで行う。n 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらない確率を p_n，n 回目に赤球を取り出す確率を q_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　p_{n+1}，q_{n+1} を p_n，q_n を用いて表せ。

問2　$a_n = p_n - q_n$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問3　$b_n = (-3)^n p_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

問4　$n+1$ 回目で試行が終わる確率を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
問4	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
小計	

受　験　番　号

後期 解答例

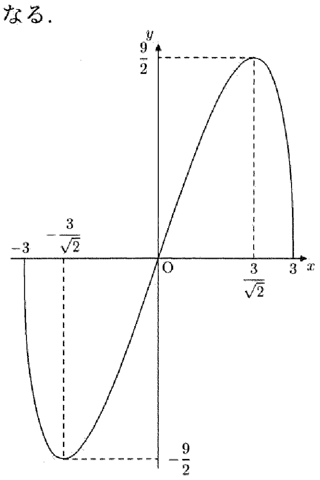
1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$9-x^2 \geqq 0$ より, 定義域は, $-3 \leqq x \leqq 3$ である.

$$y' = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

これより, 増減表およびグラフの概形は次のようになる.

x	-3		$-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$		$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$		3
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘	極小	↗	極大	↘	



問 2　図形は原点対称なので, 求める面積は,

$$2\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = 2\left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 18$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ なので,

$$f'(x) = 3F'(3x) - F'(x) = \frac{3}{1+9x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}$$

問 2

$$f'(x) = \frac{-6}{(1+x^2)(1+9x^2)}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

なので, $x \geqq 0$ で増減表を書くと次になる.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$

従って, $x \geqq 0$ での $f(x)$ の最大値は, 次の積分で与えられる.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = F(\sqrt{3}) - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

ここで, $t = \tan\theta$ と置換積分をする. $\dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta$, $dt = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ であり,

t	$\frac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

より,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+b_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=3a_n+4b_n+(2a_n+3b_n)\sqrt{2}$$

a_n, b_n は自然数で, $\sqrt{2}$ は無理数なので, 次の漸化式を得る.

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=3a_n+4b_n\\ b_{n+1}&=2a_n+3b_n \end{aligned}$$

n に関する帰納法で証明する. $n=1$ のとき, $a_1=3$, $b_1=2$ なので, a_1 は奇数, b_1 は偶数である. $n=k$ のとき, a_k が奇数で b_k が偶数とすると, $3a_k$ は奇数, $4b_k$ は偶数なので, a_{k+1} は奇数. $2a_k$ は偶数で, $3b_k$ も偶数なので, b_{k+1} は偶数. 従って $n=k+1$ のときも成立する. よってすべての n について, a_n は奇数, b_n は偶数である.

問 2

$$1+2+3+\cdots\cdots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{2}\cdot\frac{a_n+1}{2}=\frac{a_n^2-1}{8}$$

$$1+3+5+\cdots\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)=\frac{b_n^2}{4}$$

なので, $a_n^2-2b_n^2=1$ がすべての n について成立することを示せば良い.

問 1 で求めた漸化式を利用して, n に関する帰納法で証明する. $n=1$ のときは, $a_1=3$, $b_1=2$ なので成立している. $n=k$ で成立すると仮定する.

$$a_{k+1}^2-2b_{k+1}^2=(3a_k+4b_k)^2-2(2a_k+3b_k)^2=a_k^2-2b_k^2=1$$

となり, $n=k+1$ でも成立する. よって, 与えられた等式は任意の自然数 n で成立する.

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$n+1$ 回目に取り出した球が白球であり，まだ試行が続くためには，n 回目に取り出した球は赤球でなければならないので，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n$$

$n+1$ 回目に赤球を取り出すには，n 回目まで試行が続いた後，赤球を取り出すのだから，

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n + q_n)$$

問 2　問 1 の結果から，

$$a_{n+1} = p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{2}{3}q_n - \frac{1}{3}(p_n + q_n) = -\frac{1}{3}(p_n - q_n) = -\frac{1}{3}a_n$$

が成立する．

$$p_1 = \frac{2}{3}, \quad q_1 = \frac{1}{3}$$

だから，a_n は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である．よって，

$$a_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

問 3　問 1，問 2 の結果から，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n = \frac{2}{3}(p_n - a_n) = \frac{2}{3}p_n - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

両辺に $(-3)^{n+1}$ を掛けると，

$$(-3)^{n+1}p_{n+1} = -2\cdot(-3)^n p_n - 2$$

$b_n = (-3)^n p_n$ なので，b_n は漸化式 $b_{n+1} = -2b_n - 2$ を満たす．

$$b_{n+1} + \frac{2}{3} = -2\left(b_n + \frac{2}{3}\right)$$

となるので，$b_n + \frac{2}{3}$ は初項 $b_1 + \frac{2}{3} = -3p_1 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$，公比 -2 の等比数列である．従って，

$$b_n = (-2)^{n-1}\left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3} = (-2)^n\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$$

問 4　上の結果から，

$$p_n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

求める確率は，n 回目に試行を終了することなく白球が出て，$n+1$ 回目に白球を取り出す確率なので，

$$\frac{2}{3}p_n = \frac{4}{9}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$