令和４年度入学試験問題（前期日程）

数　学　甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として 1 ，2 ，3 ，4 が出題されている。
全問解答すること。

注　意　事　項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1　$x>0$ の範囲で，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$$

と定め，$y=f(x)$ で表される曲線を C とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$f(x)$ の極値を求めよ。

問 2　曲線 C の接線で，点 $(0,1)$ を通り，傾きが負であるものを l とする。直線 l の傾きを求めよ。

問 3　曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 d と n を正の整数とする。1 から n までの d 乗の和を $S_d(n) = 1^d + 2^d + \cdots\cdots + n^d$ とおく。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　すべての正の整数 n について，$S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

問 2　恒等式 $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ を利用して，$S_5(n)$ を求めよ。

問 3　すべての正の整数 n について，$24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れることを示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 一辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，辺OAを2：1に内分する点をD，辺OBを1：2に内分する点をEとする。辺OC上に点Pをとり，線分OPの長さをtとおく。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$\cos \angle EDP$をtを用いて表せ。

問2　点Pが辺OC上を動くとき，$\cos \angle EDP$の最大値と最小値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
小計	

3 解答欄

問 1

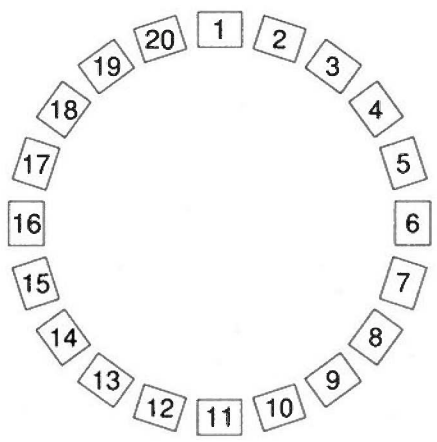
問 2

4 次の問いに答えよ。(50点)

問1　1から9までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9$ を満たすように3つの数を選び，それを(a_1, a_2, a_3)とする。このような3つの数(a_1, a_2, a_3)の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか。

問2　1から50までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50$ を満たすように3つの数を選び，それを(a_1, a_2, a_3)とする。このような3つの数(a_1, a_2, a_3)の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか。

問3　1番から20番までの番号が書かれた座席が，図のように円形に並んでいる。この中から，2つ以上の間隔を空けて3つの座席を選ぶ(例えば，1番を選んだときは2番，3番，19番，20番は選べない)。このような3つの座席の選び方は全部で何通りあるか。



(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄		
数　　学　甲		
1		
2		
3		
4		
小計		受　験　番　号

甲 解答例

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} = \frac{2-2x}{x^3}$$

ゆえ，$x > 0$ の範囲で $f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$。増減表は

x	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	1	↘

となるので，$x = 1$ で極値を取る。よって極値は $f(1) = 1$

問 2　点 $(a, f(a))$ における，曲線 C の接線の式は

$$y = \left(\frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^2}\right)(x-a) - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}$$

である。これが点 $(0,1)$ を通る必要十分条件は

$$1 = -a\left(\frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^2}\right) - \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}$$

が成り立つことである。これを解くと $a = 1,\ 3$ となるが，$f'(1) = 0,\ f'(3) = -\dfrac{4}{27}$ となるので，直線 l の傾きは $-\dfrac{4}{27}$ である。

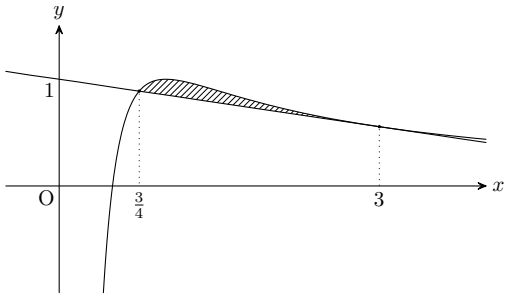
問 3　直線 l の式は $y = -\dfrac{4}{27}x + 1$ である。方程式

$$-\frac{4}{27}x + 1 = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$$

を解くと $x = \dfrac{3}{4},\ 3$ となる。したがって直線 l と曲線 C の共有点は $\left(\dfrac{3}{4}, f\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$ と $(3, f(3))$ である。$-\dfrac{4}{27}\cdot 1 + 1 = \dfrac{23}{27} < 1 = f(1)$ だから，$\dfrac{3}{4} < x < 3$ において曲線 C は直線 l の上部にある。したがって求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{3}{4}}^{3} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \left(-\frac{4}{27}x + 1 \right) \right) dx = -\frac{21}{8} + 4\log 2$$

である。



2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　数学的帰納法により，すべての正の整数 n について

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \cdots\cdots \ ①$$

が成り立つことを証明する。

［1］ $n = 1$ のとき (左辺)= $S_3(1) = 1^3 = 1$，(右辺)= $\dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1$。よって $n = 1$ のとき ① が成り立つ。

［2］ $n = k$ のとき ① が成り立つと仮定する。$n = k+1$ のときの ① を考えると

$$\begin{aligned} S_3(k+1) &= S_3(k) + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2}{4}\big(k^2 + 4(k+1)\big) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも ① が成り立つ。

［1］，［2］から，すべての正の整数 n について ① が成り立つ。

問 2　恒等式 $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ に $k = 1, 2, \cdots, n$ を代入して n 個の等式を辺々加えると $n^3(n+1)^3 = 6S_5(n) + 2S_3(n)$。よって

$$\begin{aligned} 6S_5(n) &= n^3(n+1)^3 - 2S_3(n) = n^3(n+1)^3 - \frac{n^2(n+1)^2}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{2}\big(2n(n+1) - 1\big) \end{aligned}$$

すなわち，$S_5(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{12}(2n^2 + 2n - 1)$。

問 3　恒等式 $k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 = 8k^7 + 8k^5$ に $k = 1, 2, \cdots, n$ を代入して n 個の等式を辺々加えると

$$n^4(n+1)^4 = 8S_7(n) + 8S_5(n)$$

両辺を 3 倍して移項すると

$$\begin{aligned} 24S_7(n) &= 3n^4(n+1)^4 - 24S_5(n) \overset{問2}{=} 3n^4(n+1)^4 - 2n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1) \\ &= n^2(n+1)^2\big(3n^2(n+1)^2 - 2(2n^2 + 2n - 1)\big) \end{aligned}$$

したがって，すべての正の整数 n について，整数 $24S_7(n)$ は $n^2(n+1)^2$ で割り切れる。

3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\cos\angle \mathrm{EDP} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|}$$

である。P は辺 OC を $t:(1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に内分する点なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{DP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

である。仮定より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2}$$

であることから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}} &= \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = -\frac{1}{6}t + \frac{1}{3}, \\
\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \frac{1}{3}, \\
\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|^2 &= \left|t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

である。したがって

$$\cos\angle \mathrm{EDP} = \frac{-\frac{1}{6}t + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}(t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{9})}} = \frac{\sqrt{3}\,(2-t)}{2\sqrt{9t^2 - 6t + 4}}$$

となる。

問 2 $f(t) = \cos\angle \mathrm{EDP} = \dfrac{\sqrt{3}\,(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ とおく。

$$f'(t) = \frac{\sqrt{3}\,(2-15t)}{2(9t^2-6t+4)^{\frac{3}{2}}}$$

なので $f'(t) = 0$ となるのは $t = \dfrac{2}{15}$ のときで，$f(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	…	$\frac{2}{15}$	…	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

$\sqrt{7} > 1$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ である。以上より，$\cos\angle \mathrm{EDP}$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$ である。

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　条件を満たす 3 つの数 (a_1, a_2, a_3) の選び方を全部書き出すと,

$$(1,4,7),\ (1,4,8),\ (1,4,9),\ (1,5,8),\ (1,5,9),\ (1,6,9),\ (2,5,8),\ (2,5,9),\ (2,6,9),\ (3,6,9)$$

の 10 通り。

問 2　3 つの数 (a_1, a_2, a_3) について

$$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50,\quad a_2 - a_1 \geqq 10,\quad a_3 - a_2 \geqq 10$$

を満たすことと

$$1 \leqq a_1 < a_2 - 9 < a_3 - 18 \leqq 50 - 18 = 32$$

を満たすことは同値である。したがって, 問の条件を満たす 3 つの数 (a_1, a_2, a_3) と, $1 \leqq b_1 < b_2 < b_3 \leqq 32$ を満たす 3 つの数 (b_1, b_2, b_3) は 1 対 1 に対応する。以上より，条件を満たす 3 つの数の選び方は全部で ${}_{32}C_3 = \dfrac{32 \cdot 31 \cdot 30}{6} = 4960$ 通り。

問 3　選ぶ座席番号を $a_1 < a_2 < a_3$ とする。

(1)　$a_1 = 1$ のとき，a_2, a_3 の条件は，$4 \leqq a_2 < a_3 \leqq 18$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 3$ である。これは

$$4 \leqq a_2 < a_3 - 2 \leqq 18 - 2 = 16 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leqq a_2 - 3 < a_3 - 5 \leqq 16 - 3 = 13$$

と同値。よって，この場合の選び方は ${}_{13}C_2 = 78$ 通り。

(2)　$a_1 = 2,\ a_1 = 3$ のときも，同様にして各々 78 通り。

(3)　番号 1,2,3 を選ばないとき,

$$4 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 20,\quad a_2 - a_1 \geqq 3,\quad a_3 - a_2 \geqq 3$$

は

$$1 \leqq a_1 - 3 < a_2 - 3 < a_3 - 3 \leqq 20 - 3 = 17,\quad a_2 - a_1 \geqq 3,\quad a_3 - a_2 \geqq 3$$

と同値。したがって

$$1 \leqq a_1 - 3 < a_2 - 5 < a_3 - 7 \leqq 17 - 4 = 13$$

と同値。よって ${}_{13}C_3 = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286$ 通り。

以上より，全部で $78 \cdot 3 + 286 = 234 + 286 = 520$ 通り。