令和 4 年度入学試験問題（後期日程）

数　学（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120 分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

$\boxed{1}$ p を $0<p<\frac{1}{2}$ を満たす定数とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　3 次方程式 $x=p+(1-p)x^3$ の実数解のうち，2 番目に大きいものを求めよ。

問 2　問 1 で求めた実数解を α とする。不等式 $\alpha<p+p^3$ が成り立つことを示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

により定める。次の問いに答えよ。(50点)

問1　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\sqrt{n}}$を求めよ。

問2　$a_n \geqq 18000$となるような最小の正の整数nを求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
小計	

2 **解答欄**

問 1

問 2

3 関数 $f(x)$ は $x>0$ において等式 $f(x)=\log x-\int_1^e \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ を満たすとする。このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。(50 点)

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
小計	

3 解答欄

4 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　等式 $2^{199} = (1+1)^{199}$ と，199 が素数であることを用いて，2^{199} を 199 で割った余りを求めよ。

問 2　2^{199} を 39203 で割った余りを求めよ。ただし，39203 が $39203 = 197 \cdot 199$ と素因数分解されることは証明なしに用いてよい。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
小計	

受　験　番　号

$\boxed{\mathbf{1}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$(1-p)x^3 - x + p = (x-1)\big((1-p)x^2 + (1-p)x - p\big)$ より，方程式の解は

$$x = 1,\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} - 1\right)$$

である。1 以外の 2 つの解を根号の前の符号にあわせて α_+, α_- とし，

$$\alpha_- < \alpha_+ < 1$$

を示す。$\alpha_- < \alpha_+$ は $\sqrt{\dfrac{1+3p}{1-p}} > 0$ からしたがう。次に，α_+ は p の単調増加関数で $p = 0$ のとき 0，$p = \dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1) < 1$ だから，$0 < p < \dfrac{1}{2}$ のとき $0 < \alpha_+ < 1$ をみたす。

したがって 2 番目に大きい実数解は $\alpha_+ = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1+3p}{1-p}} - 1\right)$ である。

問 2　問 1 より $\alpha = \alpha_+$ である。$\alpha < p + p^3$ は

$$\sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < 2(p+p^3) + 1$$

と同値で，これは

$$\frac{1+3p}{1-p} < (2p + 2p^3 + 1)^2$$

すなわち

$$4p^4(1 - 2p + p^2 - p^3) > 0$$

からしたがう。よって $f(p) = 1 - 2p + p^2 - p^3$ とおくとき $f(p) > 0$ を示せばよい。実際，

$$f'(p) = -2 + 2p - 3p^2 = -3\left((p - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{5}{9}\right) < 0$$

なので $f(p)$ は単調減少で，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$ より $0 < p < \dfrac{1}{2}$ で $f(p) > 0$ である。

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　区分求積法の公式より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}$$

問 2　すべての正の整数 n に対し，不等式

$$\int_0^n \sqrt{x}dx < a_n < \int_0^{n+1} \sqrt{x}dx$$

が成り立つので，不等式

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < a_n < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

が成り立つ。一方で $\frac{2}{3}n\sqrt{n} = 18000$ を解くと $n = 900$ だから，① より次の 2 つの不等式

$$18000 = \frac{2}{3}\cdot 900\cdot\sqrt{900} < a_{900},$$

$$a_{899} < \frac{2}{3}\cdot 900\cdot\sqrt{900} = 18000$$

が成り立つ。a_n は n について単調増加なので，$a_n \geqq 18000$ となるような最小の正の整数 n は 900 である。

3 ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

$\displaystyle\int_1^e \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_1^e \frac{|f(t)|}{t}\,dt = k$（$k$ は定数）とおくと，$f(x) = \log x - k$ となる。これより

$$\begin{aligned} k &= \int_1^e \frac{|f(t)|}{t}\,dt \\ &= \int_1^e \frac{|\log t - k|}{t}\,dt \end{aligned}$$

である。被積分関数は常に 0 以上の値を取るので $k \geqq 0$ である。$\log t - k \geqq 0 \iff t \geqq e^k$ に注意する。

(i) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき $1 \leqq e^k \leqq e$ であり，

$$\begin{aligned} k &= \int_1^{e^k} \left(\frac{k}{t} - \frac{\log t}{t}\right)dt + \int_{e^k}^{e} \left(\frac{\log t}{t} - \frac{k}{t}\right)dt \\ &= \left[k\log t - \frac{(\log t)^2}{2}\right]_1^{e^k} + \left[\frac{(\log t)^2}{2} - k\log t\right]_{e^k}^{e} \\ &= k^2 - k + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって，$k = k^2 - k + \dfrac{1}{2}$ より $k = 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるが，$0 \leqq k \leqq 1$ なので $k = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。

(ii) $k > 1$ のとき $e^k > e$ であり，

$$k = \int_1^e \left(\frac{k}{t} - \frac{\log t}{t}\right)dt = \left[k\log t - \frac{(\log t)^2}{2}\right]_1^e = k - \frac{1}{2}$$

したがって $k = k - \dfrac{1}{2}$ であるが，これを満たす k は存在しない。

以上より $k = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。よって $f(x) = \log x - 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

$\boxed{\mathbf{4}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　二項定理より

$$2^{199} = (1+1)^{199} = {}_{199}C_0 + {}_{199}C_1 + {}_{199}C_2 + \cdots\cdots + {}_{199}C_r + \cdots\cdots + {}_{199}C_{199}$$

である。${}_{199}C_r$ は正の整数であり

$${}_{199}C_r = \frac{199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot \cdots\cdots (200-r)}{r!}$$

である。$1 \leqq r \leqq 198$ のとき，分子に 199 が現れて分母には現れないので，199 が素数であることに注意して ${}_{199}C_r$ は 199 で割り切れることが分かる。また ${}_{199}C_0 = {}_{199}C_{199} = 1$ ゆえ，2^{199} を 199 で割った余りは 2

問 2　問 1 と同様に ${}_{199}C_r$ について $3 \leqq r \leqq 196$ のとき，分子に 199 と 197 が現れて分母には現れないので，197 と 199 が素数であることに注意して ${}_{199}C_r$ は $39203 = 197 \cdot 199$ で割り切れることが分かる。また ${}_{199}C_0 = {}_{199}C_{199} = 1$，${}_{199}C_1 = {}_{199}C_{198} = 199$，${}_{199}C_2 = {}_{199}C_{197} = 199 \cdot 99$ より，2^{199} を 39203 で割った余りは,

$$1 \cdot 2 + 199 \cdot 2 + 199 \cdot 99 \cdot 2$$

を 39203 で割った余りに等しい。ところが

$$199 \cdot 99 \cdot 2 = 199 \cdot 198 = 199 \cdot (197+1)$$

ゆえ, 2^{199} を 39203 で割った余りは $2 + 199 \cdot 3 = 599$