令 和 3 年 度 入 学 試 験 問 題 (後期日程)

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

$\boxed{1}$ 関数 $y = x^3e^{-x^2}$ の増減，極値および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，$\lim_{x \to \infty} x^3e^{-x^2} = 0$，$\lim_{x \to -\infty} x^3e^{-x^2} = 0$ であることは証明なしに用いてよい。(50 点)

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
小計	

1 解答欄

2 定積分

$$\int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x|\,dx$$

を求めよ。(50 点)

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
小計	

2 解答欄

3 α, βは複素数で，αの実部，虚部はどちらも0でない有理数であるとする。複素数平面上で3点O(0)，A(α)，B(β)が正三角形の頂点となっているとき，βの実部，虚部はどちらも無理数であることを示せ。ただし，$\sqrt{3}$が無理数であることは証明なしに用いてよい。(50点)

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
小計	

3 解答欄

4 原点Oから出発して座標平面内を移動する点Aを考える。点Aは，1回ごとに，確率pでx軸の正の向きに1だけ移動し，確率$1-p$でy軸の正の向きに1だけ移動する。ここで$0<p<1$である。

点Aが14回移動するとき，

- Eを「点Aが座標平面内の点P(5，4)を通る」という事象
- Fを「点Aが座標平面内の点Q(7，7)に到達する」という事象

とする。このとき，次の問いに答えよ。(50点)

問1　事象Eが起こる確率$P(E)$を求めよ。

問2　事象Eが起こったときの事象Fの条件付き確率$P_E(F)$を求めよ。

問3　事象Fが起こったときの事象Eの条件付き確率$P_F(E)$を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 **解答欄**

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
小計	

受 験 番 号

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 e^{-x^2} + x^3 \cdot (-2x) e^{-x^2} \\ &= (3x^2 - 2x^4) e^{-x^2} \\ &= x^2 (3 - 2x^2) e^{-x^2} \\ f''(x) &= (6x - 8x^3) e^{-x^2} - 2x(3x^2 - 2x^4) e^{-x^2} \\ &= (6x - 14x^3 + 4x^5) e^{-x^2} \\ &= 2x(3 - 7x^2 + 2x^4) e^{-x^2} \\ &= 2x(2x^2 - 1)(x^2 - 3) e^{-x^2} \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ となるのは

$$x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

で, $e^{-x^2} > 0$ に注意すると, 増減表は

x		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\searrow$

となり, $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ で極小値 $-\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$ を, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ で極大値 $\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$ をとる.

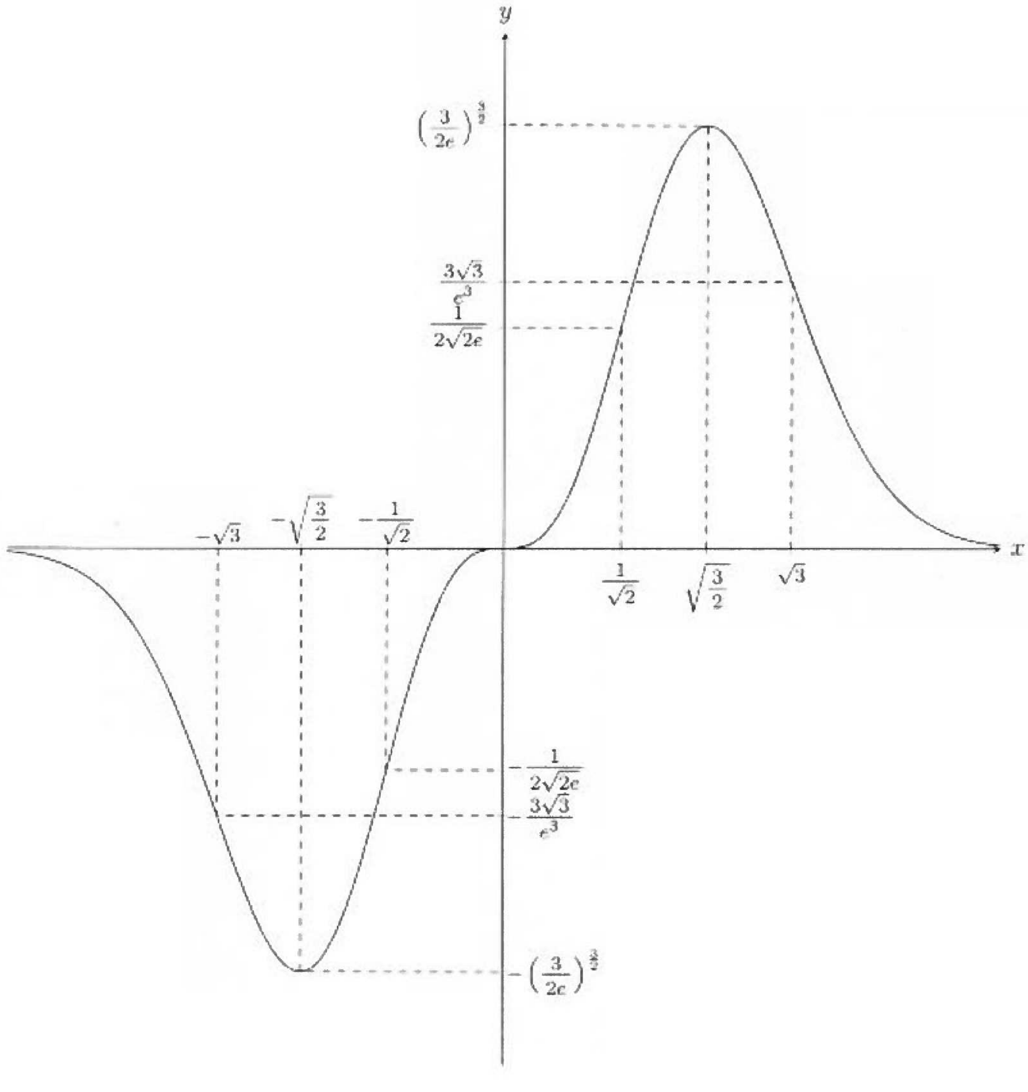
また, $f''(x) = 0$ となるのは

$$x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{3}$$

であるから, 凹凸は

x		$-\sqrt{3}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$-\frac{3\sqrt{3}}{e^3}$	$\cup$	$-\frac{1}{2\sqrt{2e}}$	$\cap$	0	$\cup$	$\frac{1}{2\sqrt{2e}}$	$\cap$	$\frac{3\sqrt{3}}{e^3}$	$\cup$

$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} x^3 e^{-x^2} = 0$ と合わせて, グラフは


y
$\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$
$\frac{3\sqrt{3}}{e^3}$
$\frac{1}{2\sqrt{2e}}$
$-\sqrt{3}$
$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
x
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\sqrt{3}$
$-\frac{1}{2\sqrt{2e}}$
$-\frac{3\sqrt{3}}{e^3}$
$-\left(\frac{3}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}$

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

$f(x) = 3\sin x + \cos x$ とおく．

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin x + \cos x \\ &= \sqrt{3^2 + 1^2}\sin(x + \alpha) \\ &= \sqrt{10}\sin(x + \alpha) \end{aligned}$$

ただし

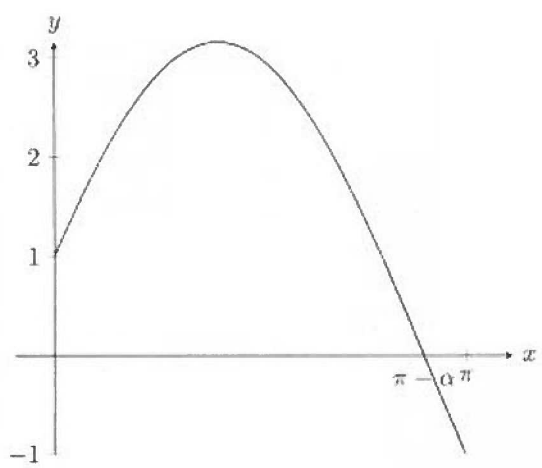
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ としてよい．$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $0 < \alpha \leqq x + \alpha \leqq \pi + \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ なので，$0 < x + \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

よって $x + \alpha = \pi$, すなわち $x = \pi - \alpha$ のとき $f(x) = 0$, $0 \leqq x < \pi - \alpha$ のとき $f(x) > 0$, $\pi - \alpha < x \leqq \pi$ のとき $f(x) < 0$.

従って，

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x|\, dx &= \int_0^{\pi-\alpha} f(x)dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} (-f(x))dx \\ &= \int_0^{\pi-\alpha} \sqrt{10}\sin(x+\alpha)dx - \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \sqrt{10}\sin(x+\alpha)dx \\ &= \Big[-\sqrt{10}\cos(x+\alpha)\Big]_0^{\pi-\alpha} - \Big[-\sqrt{10}\cos(x+\alpha)\Big]_{\pi-\alpha}^{\pi} \\ &= \sqrt{10}\,(-\cos\pi + \cos\alpha + \cos(\pi+\alpha) - \cos\pi) \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$



3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

a, b, x, y を実数, $\alpha = a + bi$, $\beta = x + yi$ とする. 点 B は点 A を原点を中心に $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点であるから

$$\begin{aligned}\beta &= \left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right)(a+bi)\\ &= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(a+bi)\\ &= \frac{1}{2}\left((a \mp \sqrt{3}b) + (\pm\sqrt{3}a + b)i\right)\end{aligned}$$

ゆえ

$$\begin{aligned}2x &= a \mp \sqrt{3}b\\ 2y &= \pm\sqrt{3}a + b\end{aligned}$$

a, b ともに 0 ではないので

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \mp\frac{2x-a}{b}\\ &= \pm\frac{2y-b}{a}\end{aligned}$$

仮定より a, b は有理数なので, x か y が有理数ならば $\sqrt{3}$ が有理数となり不合理. よって, x, y ともに無理数.

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　点 P を通るのは，9 回移動したときに，5 回 x 軸方向に，4 回 y 軸方向に移動するときであるから，

$$P(E) = {}_9\mathrm{C}_5\, p^5(1-p)^4 = 126p^5(1-p)^4$$

問 2　点 P を通って点 Q に到達するのは，残りの 5 回中 2 回 x 軸方向に移動，3 回 y 軸方向に移動するとき．よって

$$P(E \cap F) = {}_9\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_2\, p^7(1-p)^7$$

であるから

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{{}_9\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_2\, p^7(1-p)^7}{{}_9\mathrm{C}_5\, p^5(1-p)^4} = {}_5\mathrm{C}_2\, p^2(1-p)^3 = 10p^2(1-p)^3$$

問 3　問 1 と同様に考えると

$$P(F) = {}_{14}\mathrm{C}_7\, p^7(1-p)^7$$

であるから

$$P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{{}_9\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_2\, p^7(1-p)^7}{{}_{14}\mathrm{C}_7\, p^7(1-p)^7} = \frac{{}_9\mathrm{C}_5 \times {}_5\mathrm{C}_2}{{}_{14}\mathrm{C}_7} = \frac{105}{286}$$