令 和 3 年 度 入 学 試 験 問 題 （前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，60 分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1　不等式$(x^2+y^2-2)(y-x^2)>0$の表す領域を図示せよ。

問2　15334と30381の最大公約数を求めよ。

問3　方程式$2^x-(\sqrt{2})^{x+1}-4=0$を解け。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=x^3-3x^2+4$ について，次の問いに答えよ。（50 点）

問 1　$y=f(x)$ の極値を調べ，そのグラフをかけ。

問 2　曲線 $y=f(x)$ について，傾きが 9 で y 切片が正である接線の方程式を求めよ。

問 3　問 2 で求めた接線と曲線 $y=f(x)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
小計	

受験番号

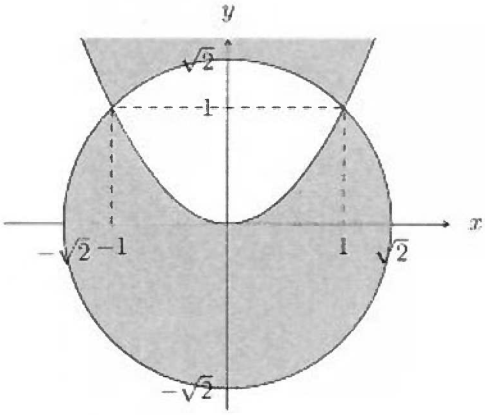
乙 解答例

1 ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1　不等式の表す領域は，$x^2+y^2>2$ かつ $y>x^2$，または，$x^2+y^2<2$ かつ $y<x^2$ を満たす点 (x,y) の全体。

放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+y^2=2$ の交点の y 座標は $0=y+y^2-2=(y+2)(y-1)$ より 1。よって交点は $(-1,1)$，$(1,1)$（交点は求めなくてもよい）。

図は次のようになる（境界線は含まない）。



問 2　ユークリッドの互除法により

$$
\begin{aligned}
30381 &= 15334\times 1+15047\\
15334 &= 15047\times 1+287\\
15047 &= 287\times 52+123\\
287 &= 123\times 2+41\\
123 &= 41\times 3+0
\end{aligned}
$$

となるので，最大公約数は 41。

問 3　$t=\left(\sqrt{2}\right)^x$ とおくと $t>0$ であり，

$$2^x=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^x=\left(\sqrt{2}\right)^{2x}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^x\right)^2=t^2$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{x+1}=\sqrt{2}\times\left(\sqrt{2}\right)^x=\sqrt{2}t$$

ゆえ

$$
\begin{aligned}
0&=2^x-\left(\sqrt{2}\right)^{x+1}-4\\
&=t^2-\sqrt{2}t-4\\
&=(t-2\sqrt{2})(t+\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

$t>0$ なので $t=2\sqrt{2}$，すなわち $\left(\sqrt{2}\right)^x=2\sqrt{2}$。よって $x=3$。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

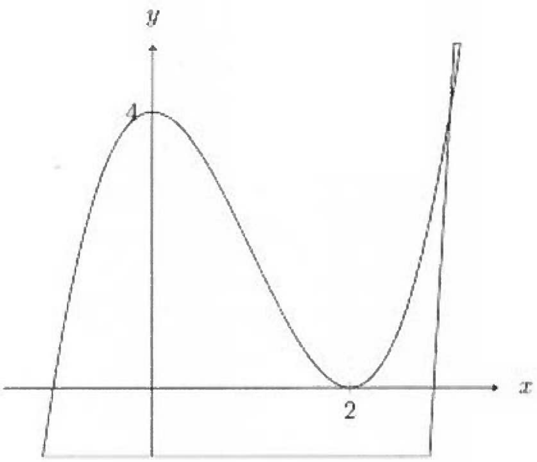
$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

ゆえ $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$。$f(0) = 4$, $f(2) = 0$ であるから増減表は

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

となり，$x = 0$ で極大値 4 をとり，$x = 2$ で極小値 0 をとる。

グラフは



問 2　$f'(x) = 9$，すなわち

$$\begin{aligned} f'(x) - 9 &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x^2 - 2x - 3) \\ &= 3(x-3)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

となるのは $x = -1, 3$。

点 $(3, f(3)) = (3, 4)$ における接線の方程式は

$$y = 9(x-3) + 4 = 9x - 23$$

で，y 切片が負であるから不適。

点 $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ における接線の方程式は

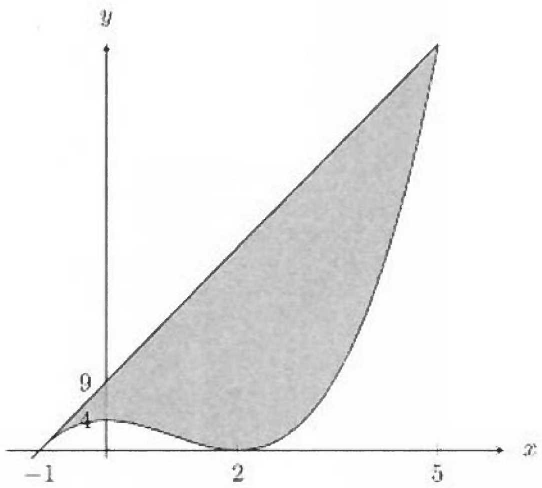
$$y = 9(x+1) = 9x + 9$$

である。よってこれが求める方程式。

問 3　$y=f(x)$ と $y=9x+9$ の交点の x 座標を求める。

$$\begin{aligned} f(x)-(9x+9) &= x^3-3x^2+4-9x-9 \\ &= x^3-3x^2-9x-5 \\ &= (x+1)^2(x-5)=0 \end{aligned}$$

を満たす x は $x=-1, 5$ である。区間 $[-1,5]$ で $f(x) \leqq 9x+9$ であり，$y=9x+9$ と $y=f(x)$ の囲む部分は次のようになる。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{5}(9x+9-f(x))\,dx &= \int_{-1}^{5}\left(-x^3+3x^2+9x+5\right)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{9x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{5} \\ &= -\frac{5^4-(-1)^4}{4}+5^3-(-1)^3+\frac{9(5^2-(-1)^2)}{2}+5(5-(-1)) \\ &= 108 \end{aligned}$$

である。