令和３年度入学試験問題（前期日程）

数　学　甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注　意　事　項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120 分である。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 7$ を考える。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　方程式 $f(x) = 0$ を解け。

問 2　$f(x)$ が $x = \alpha, \beta$（ただし $\alpha < \beta$）で極値をとるとき，α と β を求めよ（極値を求める必要はない）。

問 3　曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる領域のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ を満たす部分の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2e^{-a_n} - 1 + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。ただし，$2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてよい。(50 点)

問 1　$f(x) = e^{-x} - 1 + x$ とする。$0 < x < 1$ のとき，不等式

$$0 < f(x) < \frac{2}{3}x$$

が成り立つことを示せ。

問 2　$b_n = a_n - \log 2$ とする。すべての正の整数 n について $0 < b_n < 1$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

問 3　$\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 xy 平面上で，極方程式

$$r = \frac{1}{1+\cos\theta}$$

により与えられる曲線 C を考える。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　曲線 C の概形を図示せよ。

問 2　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし，曲線 C 上の，極座標が (r, θ) である点 P を考える。

点 P における曲線 C の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ であることを示せ。

問 3　問 2 の点 P から y 軸におろした垂線と y 軸との交点を H，原点を O とする。

$\angle$OPH の二等分線と，点 P における曲線 C の接線は直交することを示せ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

4 袋Ａには赤玉が１個と白玉が２個，袋Ｂには赤玉が３個と白玉が２個入っている。袋Ｂから玉を２個取り出して袋Ａに入れ，よく混ぜてから，袋Ａから玉を１個取り出して，色を見てから袋Ａに戻す。さらに，よく混ぜてから，もう一度袋Ａから玉を１個取り出す。このとき，次の問いに答えよ。(50 点)

問１　袋Ｂに白玉がちょうど１個残っている確率を求めよ。

問２　袋Ａから最初に取り出す玉が白玉である確率を求めよ。

問３　袋Ａから二度とも白玉を取り出す確率を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問１	
問２	
問３	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学甲	
1	
2	
3	
4	
小計	

受　験　番　号

甲 解答例

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$2x^3-3x^2-6x+7=(x-1)(2x^2-x-7)$$

ゆえ

$$x=1,\ \frac{1\pm\sqrt{57}}{4}$$

問 2

$$f'(x)=6x^2-6x-6=6(x^2-x-1)$$

ゆえ $f'(x)=0$ となるのは

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

増減表は

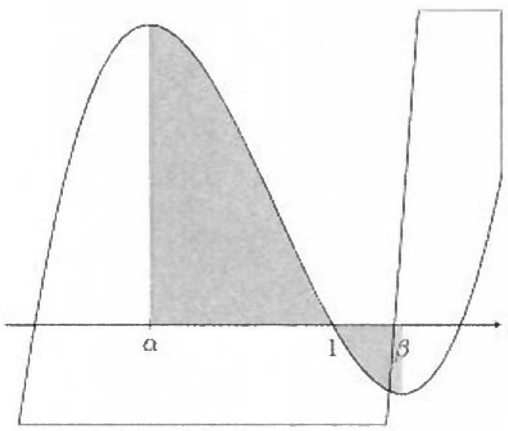
x		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

となるので, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ で極値をとる.

よって

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

問 3　$\alpha<1<\beta$ に注意すると, 求めるものは図の色のついた部分の面積 S.



よって

$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^1 f(x)dx + \int_1^\beta (-f(x))dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x\right]_\alpha^1 - \left[\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x\right]_1^\beta \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - 1 - 3 + 7\right) - \frac{1}{2}(\alpha^4 + \beta^4) + (\alpha^3 + \beta^3) + 3(\alpha^2 + \beta^2) - 7(\alpha + \beta).
\end{aligned}
$$

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ より

$$
\begin{aligned}
\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3, \\
\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 4, \\
\alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 7.
\end{aligned}
$$

よって

$$
S = 7 - \frac{7}{2} + 4 + 9 - 7 = \frac{19}{2}
$$

2 ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

である．$-e^{-x}$ は単調増加なので，$x > 0$ のとき

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 > -e^{-0} + 1 = 0$$

よって $x > 0$ のとき

$$f(x) > f(0) = 0.$$

$g(x) = \dfrac{2}{3}x - f(x)$ とおく．

$$g'(x) = \frac{2}{3} - f'(x) = e^{-x} - \frac{1}{3}$$

である．e^{-x} は単調減少なので，$x < 1$ のとき $e^{-x} > e^{-1}$．また $0 < e < 3$ ゆえ $e^{-1} > 1/3$．
よって $x < 1$ のとき

$$g'(x) = e^{-x} - \frac{1}{3} > e^{-1} - \frac{1}{3} > 0.$$

よって $x < 1$ で $g(x)$ は（狭義）単調増加．したがって $0 < x < 1$ のとき

$$g(x) > g(0) = -f(0) = 0.$$

以上から，$0 < x < 1$ のとき

$$0 < f(x) < \frac{2}{3}x$$

が成り立つ．

問 2　n に関する数学的帰納法で $0 < b_n < 1$ となることを示す．

$1 < 2 < e$ ゆえ $0 = \log 1 < \log 2 < \log e = 1$．$b_1 = 1 - \log 2$ であるから，$0 < b_1 < 1$．
よって $n = 1$ のとき成り立つ．

$n = k$ のときに成り立つ，すなわち $0 < b_k < 1$ と仮定する．問 1 より，このとき $0 < f(b_k) < \dfrac{2}{3}b_k$ が成り立つ．

$$\begin{aligned} f(b_k) &= e^{-b_k} - 1 + b_k \\ &= e^{-a_k + \log 2} - 1 + a_k - \log 2 \\ &= 2e^{-a_k} - 1 + a_k - \log 2 \\ &= a_{k+1} - \log 2 \\ &= b_{k+1}. \end{aligned}$$

従って

$$0 < b_{k+1} < \frac{2}{3}b_k$$

である．$b_k < 1$ に注意すると

$$\frac{2}{3}b_k < \frac{2}{3} < 1$$

ゆえ，$n = k + 1$ のとき $0 < b_n < 1$ が成り立つ．従って，全ての正の整数 n について $0 < b_n < 1$ が成り立つ．

問 3　上で見たことから

$$0 < b_{n+1} < \frac{2}{3}b_n < \left(\frac{2}{3}\right)^2 b_{n-1} < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^n b_1$$

が成り立つ．従ってはさみうちにより $\lim_{n \to \infty}(a_n - \log 2) = 0$．よって $\lim_{n\to\infty} a_n = \log 2$.

$\boxed{3}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1　式を変形すると

$$r = 1 - r\cos\theta$$

両辺を 2 乗して

$$r^2 = (1 - r\cos\theta)^2$$

$r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$ だから

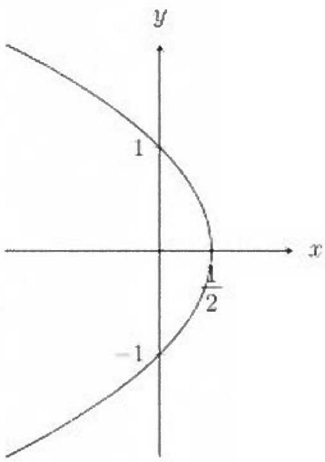
$$x^2 + y^2 = (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$$

よって

$$y^2 = -2x + 1 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

式変形を逆にたどれば，この放物線上の点の極座標は $r^2 = (1 - r\cos\theta)^2$ を満たし，さらに，$r\cos\theta = x \leqq \dfrac{1}{2} < 1$ であるから，$r = 1 - r\cos\theta$ を満たす．

従って曲線 C は放物線 $y^2 = -2x + 1$. 図は



問 2

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$$

ゆえ

$$\frac{dx}{dy} = -y$$

であるから

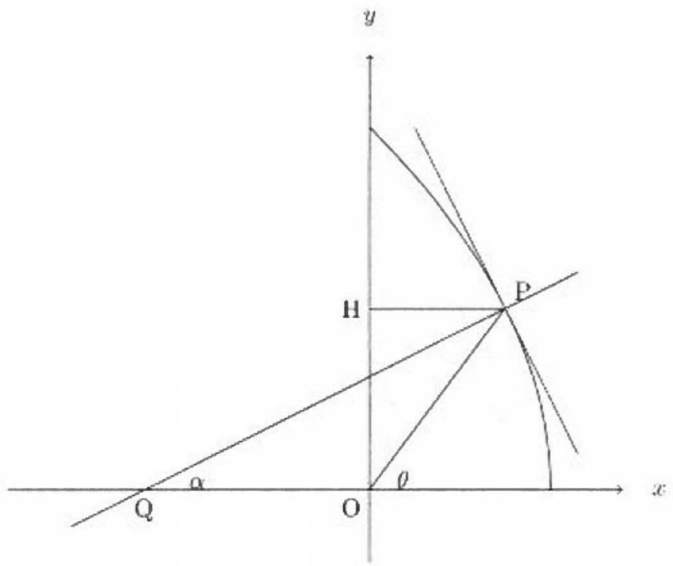
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{y}$$

$$y = r\sin\theta = \frac{1}{1 + \cos\theta} \cdot \sin\theta$$

ゆえ接線の傾きは

$$-\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

問 3　二等分線と x 軸の交点を Q とし, $\angle$OQP を α とする.



二等分線の傾きは $\tan\alpha$ である. 接線の傾きを m とする. $m\tan\alpha = -1$ を示せばよい.

線分 PH は x 軸に平行なので

$$\alpha = \angle\mathrm{QPH}, \quad \theta = \angle\mathrm{OPH}$$

ゆえ

$$\theta = \angle\mathrm{OPH} = 2\angle\mathrm{QPH} = 2\alpha$$

よって

$$\begin{aligned} m\tan\alpha &= -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\tan\alpha \\ &= -\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ &= -\frac{2\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ &= -1 \end{aligned}$$

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　袋 B に白玉がちょうど 1 個残っている事象を E_1 とする．袋 B に白玉がちょうど 1 個残っているということは，袋 B から白玉 1 個と赤玉 1 個を取り出したことになるから，求める確率は

$$P(E_1) = \frac{{}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{5}$$

問 2　袋 B に白玉が残っていない事象を E_0，白玉がちょうど 2 個残っている事象を E_2 とする．

$$P(E_0) = \frac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{1}{10}, \quad P(E_2) = \frac{{}_2\mathrm{C}_0 \times {}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{10}$$

である．袋 A から最初に取り出す玉が白玉である事象を F_1 とする．

事象 E_0 が起こったとき，袋 A には赤玉 1 個と白玉 4 個が入っているので，事象 E_0 が起こったときの事象 F_1 の起こる条件付き確率 $P_{E_0}(F_1)$ は

$$P_{E_0}(F_1) = \frac{4}{5}$$

同様にして，

$$P_{E_1}(F_1) = \frac{3}{5}, \quad P_{E_2}(F_1) = \frac{2}{5}$$

E_0, E_1, E_2 は互いに排反であるから

$$\begin{aligned} P(F_1) &= P_{E_0}(F_1)P(E_0) + P_{E_1}(F_1)P(E_1) + P_{E_2}(F_1)P(E_2) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{14}{25} \end{aligned}$$

問 3　二度とも白玉を取り出す事象を F_2 とする．問 2 と同様の計算により

$$P_{E_0}(F_2) = \frac{16}{25}, \quad P_{E_1}(F_2) = \frac{9}{25}, \quad P_{E_2}(F_2) = \frac{4}{25}$$

従って

$$\begin{aligned} P(F_2) &= P_{E_0}(F_2)P(E_0) + P_{E_1}(F_2)P(E_1) + P_{E_2}(F_2)P(E_2) \\ &= \frac{16}{25} \times \frac{1}{10} + \frac{9}{25} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{25} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{41}{125} \end{aligned}$$