令和２年度入学試験問題（後期日程）

数　学（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120 分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50点)

問1　座標平面上で2つの不等式

$$x^2 + y^2 \leqq 12, \quad y \geqq x^2$$

によって定まる領域を D とする。D の面積 S を求めよ。

問2　座標平面上で4つの不等式

$$x^2 + y^2 \leqq 12, \quad y \leqq x^2, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

によって定まる領域を E とする。E を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
小計	

1 解答欄

問1

問2

2　関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ について次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ。

問 2　定積分 $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x)\,dx$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 **解答欄**

問1

問2

3　△ABCの内部の点Pについて，$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$が成り立っている。△ABCの面積を$S$とするとき，△PBC，△PCA，△PABの面積をそれぞれSを用いて表せ。（50点）

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
小計	

3 解答欄

4 数直線上の点Pを次の規則で移動させる。一枚の硬貨を投げて，表が出ればPを$+1$だけ移動させ，裏が出ればPを原点に関して対称な点に移動させる。Pは初め原点にあるとし，硬貨をn回投げた後のPの座標をa_nとする。ただし，nは正の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。(50点)

問1　$a_3=0$となる確率を求めよ。

問2　$a_4=1$となる確率を求めよ。

問3　$n \geqq 3$のとき，$a_n=-(n-2)$となる確率をp_nとする。$p_n=\dfrac{1}{2^n}$であることを示せ。

問4　$n \geqq 3$のとき，$a_n=n-3$となる確率をq_nとする。q_nをnを用いて表せ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
問4	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

<table>
<tr><td colspan="2">採　点　欄</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">数　　学</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>小
計</td><td></td><td>受　験　番　号</td></tr>
</table>

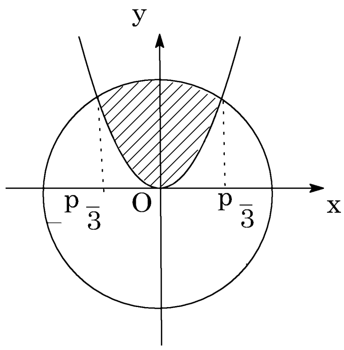
後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 曲線 $x^2+y^2=12$ と曲線 $y=x^2$ の交点は，$x^2+y^2=12$ に $y=x^2$ を代入して

$(x^2+4)(x^2-3)=0$。$\therefore$ $x=\pm\sqrt{3}$。よって交点の座標は $(-\sqrt{3}, 3), (\sqrt{3}, 3)$

領域 D は下図の斜線部分である。



よって S は

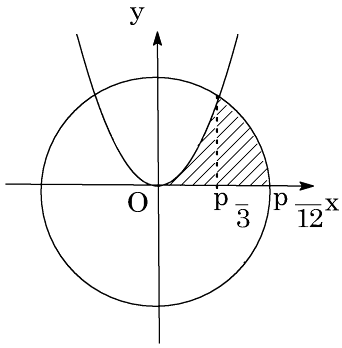
$$S=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{12-x^2}-x^2\right)dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx-2\sqrt{3}\quad\cdots\cdots①$$

$x=\sqrt{12}\sin t$ とおいて置換積分することにより

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx&=12\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt\\&=6\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2t+1\,dt\\&=6\left[\frac{\sin 2t}{2}+t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\pi\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

② を ① に代入すると，$S=\sqrt{3}+2\pi$

問 2 領域 E は下図の斜線部分である。



よって V は

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{3}} x^4\,dx + \pi\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{12}} (12 - x^2)\,dx$$
$$= \frac{9\sqrt{3}}{5}\pi + (12\sqrt{3} - 7\sqrt{3})\pi$$
$$= \frac{34\sqrt{3}}{5}\pi$$

$\boxed{2}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問１ $t = e^x - 1$ とおくと，$e^x dx = dt$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C$$

$$= \frac{1}{1 - e^x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

問２ 問１の結果を使うと，

$$\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x)\,dx = \int_{\log 2}^{\log 3} x \cdot \left\{\frac{1}{1-e^x}\right\}' dx$$

$$= \left[\frac{x}{1-e^x}\right]_{\log 2}^{\log 3} + \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{dx}{e^x - 1} \quad \cdots\cdots ①$$

第２項については $t = e^x - 1$ とおいて置換積分することにより，

$$① = -\frac{1}{2}\log 3 + \log 2 + \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\log 3 + \log 2 + [\log t - \log(t+1)]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2}\log 3 + \log 2 + \log 2 - \log 3 + \log 2$$

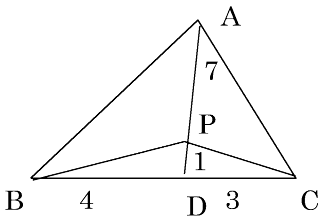
$$= 3\log 2 - \frac{3}{2}\log 3$$

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

$$\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 4\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC})$$
$$= 8\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$$

これが $\vec{0}$ なので，

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}(3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}) = \frac{7}{8}\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{7} \quad \cdots\cdots ①$$



直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき，① より次の 2 つのことが分かる。

- AP : PD = 7 : 1 ⋯⋯②
- BD : DC = 4 : 3 ⋯⋯③

4 ABC と 4 PBC は底辺 BC が共通なので，② より

$$4\ \mathrm{PBC} = \frac{1}{8}\mathrm{S} \quad \cdots\cdots ④$$

4 ABC と 4 ADC は底辺 AC が共通なので，③ より

$$4\ \mathrm{ABC} : 4\ \mathrm{ADC} = 7 : 3 \quad \cdots\cdots ⑤$$

4 ADC と 4 APC は底辺 AC が共通なので，② より

$$4\ \mathrm{ADC} : 4\ \mathrm{APC} = 8 : 7 \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤; ⑥ より

$$4\ \mathrm{PCA} = \frac{7}{8}4\ \mathrm{ADC} = \frac{7}{8}\cdot\frac{3}{7}4\ \mathrm{ABC} = \frac{3}{8}\mathrm{S} \quad \cdots\cdots ⑦$$

④; ⑦ より，

$$4\ \mathrm{PAB} = \mathrm{S} - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right)\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{S}$$

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $a_3 = 0$ となるのは，(裏; 裏; 裏), (表; 裏; 表) の 2 通りなので，求める確率は $\dfrac{2}{2^3} = \dfrac{1}{4}$

問 2 $a_4 = 1$ となるのは，(裏; 裏; 裏; 表), (表; 裏; 表; 表)，(裏; 表; 裏; 裏) の 3 通りなので，求める確率は $\dfrac{3}{2^4} = \dfrac{3}{16}$

問 3 $a_n = -(n-2)$ となるのは，(裏; $\underbrace{\text{表}; \cdots; \text{表}}_{n-2}$; 裏) のときに限るから。

問 4 $a_{n+1} = n-2$ となるのは，次のいずれかの場合である。

- $a_n = n-3$ で，$n+1$ 回目に表が出る。
- $a_n = -(n-2)$ で，$n+1$ 回目に裏が出る。

ゆえに問 3 の結果を使うと，

$$q_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot q_n + \frac{1}{2} \cdot p_n = \frac{1}{2} \cdot q_n + \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n = 3)$$

両辺に 2^{n+1} をかけて，

$$2^{n+1} \cdot q_{n+1} = 2^n \cdot q_n + 1$$

数列 f $2^n \cdot q_n$ g は，第 3 項が $2^3 \cdot q_3 = 2$，公差が 1 の等差数列であるから，

$$2^n \cdot q_n = 2 + 1 \cdot (n-3) = n-1$$

よって，$n = 3$ のとき

$$q_n = \frac{n-1}{2^n}$$