平 成 29 年 度 入 学 試 験 問 題 （後期日程）

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120 分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 関数$f(x)$は等式

$$f'(x) = \sin x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

を満たす。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = A$, $f(0) = c$ とする。$f(x)$をAとcを用いて表せ。

問 2 $f(0) = 0$のとき，$f(x)$を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 A，B，C を x の整式とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　A を B で割った商を Q，余りを R とする。このとき，C が A と B の共通因数であるための必要十分条件は，C が B と R の共通因数であることを示せ。

問 2　次の整式 A と整式 B の共通因数のうち次数が最大のものを求めよ。

$$A = x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 36x + 216$$
$$B = x^3 + 4x^2 - 15x + 42$$

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

$\boxed{3}$ 複素数 z は $|z| = 1$ を満たすとする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　z の実部を x とする。$z^2 + \bar{z}^2$ を x を用いて表せ。ただし，$\bar{z}$ は z と共役な複素数とする。

問 2　$\left|\dfrac{z}{2} + 2\bar{z} - 2\right|^2$ の最大値と最小値を求めよ。

問 3　次の等式を証明せよ。

$$\left|\frac{z}{2} + 2\bar{z} + 2\right| + \left|\frac{z}{2} + 2\bar{z} - 2\right| = 5$$

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

4 1個のさいころを投げて3以上の目が出たら5点，2以下の目が出たら2点得られるゲームを行う。次の問いに答えよ。(50点)

問 1 さいころを2回投げて，合計点が7点になる確率を求めよ。

問 2 さいころを3回投げて，合計点が偶数になる確率を求めよ。

問 3 さいころをn回投げて，合計点が偶数になる確率を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$f'(x) = \sin x + A$$

だから

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)\,dt \\ &= \int_0^x (\sin t + A)\,dt \\ &= [-\cos t + At]_0^x \\ &= -\cos x + Ax - (-1) \\ &= -\cos x + Ax + 1 \end{aligned}$$

ゆえ

$$\begin{aligned} f(x) &= -\cos x + Ax + 1 + f(0) \\ &= -\cos x + Ax + 1 + c. \end{aligned}$$

問 2 $c = f(0) = 0$ のとき

$$f(x) = -\cos x + Ax + 1$$

だから

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos t + At + 1)\,dt \\ &= \left[-\sin t + \frac{1}{2}At^2 + t\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

よって

$$f(x) = -\cos x + 2\pi x + 1.$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　仮定より $A = BQ + R$ である.

C が A と B の共通因数であるとすると,

$$A = CD, \quad B = CE$$

と書ける. ただし D, E は整式である. このとき

$$\begin{aligned} R &= A - BQ \\ &= CD - CEQ \\ &= C(D - EQ) \end{aligned}$$

となるので C は R の因数である。

一方, C が B と R の共通因数であるとすると,

$$B = CE, \quad R = CF$$

と書けるので

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \\ &= CEQ + CF \\ &= C(EQ + F) \end{aligned}$$

となり C は A の因数である。

問 2　A を B で割った商を Q, 余りを R とすると, 問 1 より求める共通因数は B と R の共通因数のうち次数が最大のものである. A を B で割ると

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 36x + 216 \\ &= \left(x^3 + 4x^2 - 15x + 42\right)(x + 5) + x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

となり $Q = x + 5$, $R = x^2 - 3x + 6$ であるが

$$\begin{aligned} B &= x^3 + 4x^2 - 15x + 42 \\ &= \left(x^2 - 3x + 6\right)(x + 7) \end{aligned}$$

と, B は $R = x^2 - 3x + 6$ で割り切れるので, 求める共通因数は $x^2 - 3x + 6$（の非零定数倍）.

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$z\overline{z} = |z|^2 = 1$ なので

$$(z+\overline{z})^2 = z^2 + \overline{z}^2 + 2z\overline{z} = z^2 + \overline{z}^2 + 2$$

である. $z + \overline{z} = 2x$ に注意すると,

$$z^2 + \overline{z}^2 = (z+\overline{z})^2 - 2 = 4x^2 - 2.$$

問 2　$z\overline{z} = 1$, $z + \overline{z} = 2x$, $z^2 + \overline{z}^2 = 4x^2 - 2$ だから

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right|^2 &= \left(\frac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right)\left(\frac{\overline{z}}{2} + 2z - 2\right) \\
&= \left(\frac{z}{2} + 2\overline{z}\right)\left(\frac{\overline{z}}{2} + 2z\right) - 2\left(\frac{z}{2} + 2\overline{z} + \frac{\overline{z}}{2} + 2z\right) + 4 \\
&= \frac{1}{4} + z^2 + \overline{z}^2 + 4 - 5(z+\overline{z}) + 4 \\
&= \frac{1}{4} + 4x^2 - 2 + 4 - 10x + 4 \\
&= 4x^2 - 10x + \frac{25}{4} \\
&= 4\left(x - \frac{5}{4}\right)^2.
\end{aligned}$$

$|z| = 1$ ゆえ $-1 \leqq x \leqq 1$ である. $1 < \frac{5}{4}$ なので $x = -1$ のとき最大で $\frac{81}{4}$, $x = 1$ のとき最小で $\frac{1}{4}$.

問 3　上（と同様）の計算から

$$\left|\frac{z}{2} + 2\overline{z} + 2\right| = 2\left|x + \frac{5}{4}\right|, \qquad \left|\frac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right| = 2\left|x - \frac{5}{4}\right|$$

である.

$$-\frac{5}{4} < -1 \leqq x \leqq 1 < \frac{5}{4}$$

なので

$$x + \frac{5}{4} > 0, \quad x - \frac{5}{4} < 0$$

だから

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{2} + 2\overline{z} + 2\right| + \left|\frac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right| &= 2\left|x + \frac{5}{4}\right| + 2\left|x - \frac{5}{4}\right| \\
&= 2\left(x + \frac{5}{4}\right) - 2\left(x - \frac{5}{4}\right) \\
&= 5.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

さいころを 1 回投げたとき, 3 以上の目が出る（つまり 5 点得る）確率は $4/6 = 2/3$, 2 以下の目が出る（つまり 2 点得る）確率は $2/6 = 1/3$.

問 1　合計点が 7 点になるのは 5 点と 2 点を 1 回ずつ得るときであるから, ${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$.

問 2　n 回投げて 3 以上の目が k 回出ると, 得点は $5k + 2(n-k) = 3k + 2n$. これが偶数になるのは k が偶数のとき. 3 回投げて偶数になるのは 3 以上の目が 1 回も出ないか 2 回出るとき. よって求める確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{13}{27}. $$

問 3　求める確率は 3 以上の目が偶数回出る確率だから

$$ \sum_{i=0}^{[n/2]} {}_n\mathrm{C}_{2i}\left(\frac{2}{3}\right)^{2i}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2i}. $$

二項定理より

$$ \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^n = 1, $$
$$ \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(-\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n. $$

足すと

$$ 2\sum_{i=0}^{[n/2]} {}_n\mathrm{C}_{2i}\left(\frac{2}{3}\right)^{2i}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2i} = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n. $$

よって求める確率は

$$ \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right). $$