平成29年度入学試験問題（前期日程）

# 数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

**注意事項**

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，60分である。

| 受験番号 |
| --- |
| |

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

**1**　$0 \leqq a \leqq 1$ とし，$f(a)=\int_0^1 |x(a-x)|\,dx$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　定積分 $\int_0^1 x(1-x)\,dx$ を求めよ。

問 2　$f(a)$ を $a$ の関数として表せ。

問 3　$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $a$ の値をそれぞれ求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 問 3 | |
| 小計 | |

**1** 解答欄

問 1

問 2

問 3

**2** $a$，$b$ を正の実数とする。座標空間における 4 点 $O(0, 0, 0)$，$A(a, 0, 0)$，$B(0, b, 0)$，$C(0, 0, 1)$を頂点とする四面体 OABC を考える。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ の内積を求めよ。

問 2 $\cos\angle ACB$ と $\sin\angle ACB$ を $a$，$b$ を用いて表せ。

問 3 三角形 ABC の面積を $a$，$b$ を用いて表せ。

問 4 四面体 OABC の体積が 1 であるとき，三角形 ABC の面積の最小値とそのときの $a$ と $b$ の値を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採点欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 問 3 | |
| 問 4 | |
| 小計 | |

## 2 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 数　　学乙 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 合計 | |

| 受　験　番　号 |
|---|
| |

乙 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)\,dx &= \int_0^1 (x-x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

問 2 $|x(a-x)| = \begin{cases} ax - x^2 & 0 \leqq x \leqq a \text{ のとき} \\ x^2 - ax & a \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}\end{cases}$ であるから，

$$\begin{aligned}f(a) &= \int_0^a (ax-x^2)\,dx + \int_a^1 (x^2-ax)\,dx \\ &= \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1 \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) \\ &= \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

問 3 $f'(a) = a^2 - \dfrac{1}{2}$ より，$0 \leqq a \leqq 1$ の範囲で $f'(a) = 0$ を解いて $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. これより増減表は

| $a$ | $0$ | $\cdots\cdots$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(a)$ | $\frac{1}{3}$ | ↘ | 最小 | ↗ | $\frac{1}{6}$ |

よって，$f(a)$ は $a=0$ のとき最大値 $\dfrac{1}{3}$，$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ となる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a, 0, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0, b, -1)$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = a \cdot 0 + 0 \cdot b + (-1) \cdot (-1) = 1.$$

問 2　$\cos \angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$,

$\sin^2 \angle \mathrm{ACB} = 1 - \cos^2 \angle \mathrm{ACB} = 1 - \dfrac{1}{(a^2+1)(b^2+1)} = \dfrac{a^2b^2 + a^2 + b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}$.

よって，$0 < \angle \mathrm{ACB} < \pi$ より $\sin \angle \mathrm{ACB} = \dfrac{\sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$.

問 3　$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を $S$ とする。

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| \sin \angle \mathrm{ACB} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2}.$$

問 4　四面体 OABC の体積を $V$ とする。

四面体 OABC を底面 $\triangle \mathrm{OAB}$，高さ OC の三角錐とみなし，$\mathrm{V} = \dfrac{1}{6}ab$ を得る。

ここで，$V = 1$ より，$ab = 6$ となる。

相加平均と相乗平均を比較して $a^2 + b^2 \geqq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$ であるから，$ab = 6$ に注意して，$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積 $S$ について,

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + 2ab} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 12} = 2\sqrt{3}$$

を得る。ここで，等号成立は $a = b$ のときなので $a = b = \sqrt{6}$ のときとなる。

以上より，$a = b = \sqrt{6}$ のとき $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積は最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。