# 平成28年度入学試験問題（後期日程）

# 数　学（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

**注意事項**

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

| 受験番号 |
| --- |
| |

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

**1** 次の問いに答えよ。(50点)

問 1　条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のもとで，$u=x+y$ の値の範囲を求めよ。

問 2　$u=x+y$，$v=xy$ とする。条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，$u$ と $v$ の満たす関係式を求めよ。

問 3　条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のもとで，$z=x+y+2xy$ の値の範囲を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 問 3 | |
| 小計 | |

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

**2** $i$を虚数単位とする。複素数$z$が等式$|z-i|=|2z+i|$を満たすとき，次の問いに答えよ。(50点)

問1　複素数平面上で，この等式を満たす点$z$全体の表す図形を求めよ。

問2　$iz-2+i$の偏角$\theta$の範囲を求めよ。ただし$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採点欄 | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | |
| 小計 | |

## 2 解答欄

問 1

問 2

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　原点$(0, 0)$を通り，曲線$y = \dfrac{\log x}{x^2}$に接する直線の方程式を求めよ。

問 2　曲線$y = \dfrac{\log x}{x^2}$と問 1 で求めた直線および$x$軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 小計 | |

## 3 解答欄

問 1

問 2

**4** 10進法表記で1から2016までの自然数の集合を$M$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　2進法で表しても，3進法で表しても，5進法で表しても1の位が0となる$M$の元の個数はいくつか。

問2　2進法，3進法，5進法で表したとき，そのうち2つは1の位が0で，他の1つは1の位が0ではないような$M$の元の個数はいくつか。

問3　2進法，3進法，5進法で表したとき，そのうち1つのみ1の位が0で，他の2つは1の位が0ではないような$M$の元の個数はいくつか。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採点欄 | |
| --- | --- |
| 問1 | |
| 問2 | |
| 問3 | |
| 小計 | |

## 4 解答欄

問 1

問 2

問 3

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 数　　学 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 合計 | |

| 受　験　番　号 |
|---|
| |

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$x^2+y^2=1$ より，$x=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ と置くことが出来る。このとき

$$u=x+y=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ より $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ だから $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3\pi}{4}$

この範囲において $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ だから $1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

よって求める値の範囲は　$1\leqq u\leqq\sqrt{2}$

問 2　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1$ だから，$u=x+y$ と $v=xy$ で置き換えると，

$$x^2+y^2=u^2-2v=1$$

よって　$v=\dfrac{u^2-1}{2}$

問 3　$x+y=u$ とおくと，問 2 より $xy=\dfrac{u^2-1}{2}$ であるから

$$z=x+y+2xy=u+(u^2-1)=u^2+u-1$$

だから $z=u^2+u-1$ となる。

$$z=u^2+u-1=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

より $(u, z)$ のグラフは $u=-\dfrac{1}{2}$ を軸とする下に凸の放物線となり，$u\geqq-\dfrac{1}{2}$ において単調増加。問 1 より $u$ の取り得る値の範囲は $1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ だから $z=f(u)$ と置くと $z$ がこの範囲で取り得る値は $f(1)=1+1-1=1$，$f(\sqrt{2})=2+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}+1$ から $1\leqq z\leqq\sqrt{2}+1$ となる。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　等式の両辺を平方して

$$|z-i|^2 = |2z+i|^2$$
$$(z-i)\overline{(z-i)} = (2z+i)\overline{(2z+i)}$$
$$(z-i)(\overline{z}+i) = (2z+i)(2\overline{z}-i)$$

両辺を展開して整理すれば

$$z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 = 4z\overline{z} - 2iz + 2i\overline{z} + 1$$
$$z\overline{z} - iz + i\overline{z} = 0$$
$$z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 = 1$$

よって

$$(z+i)(\overline{z}-i) = 1$$
$$|z+i|^2 = 1$$

従って $|z+i| = 1$ となる。よって点 $z$ の全体は，中心が点 $-i$ で半径が 1 の円を表す。

問 2　$iz - 2 + i = i(z+1+2i)$ ゆえ

$$\arg(iz-2+i) = \arg i + \arg(z+1+2i) = \frac{\pi}{2} + \arg(z+1+2i)$$

点 $-1-2i$ から問 1 の円に引いた接線の接点は点 $-2i$ と $-1-i$ で

$$\arg(-2i+1+2i) = \arg(1) = 0$$
$$\arg(-1-i+1+2i) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

ゆえに，点 $z$ が問 1 の円の上を動くとき，偏角 $\phi = \arg(z+1+2i)$ の範囲は $0 \leqq \phi \leqq \dfrac{\pi}{2}$
よって求める偏角の範囲は $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$

$\boxed{\mathbf{3}}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1　曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ 上の点 $(x_0, y_0)$，ただし $x_0>0$，$y_0=\dfrac{\log x_0}{x_0^2}$ での接線は

$\left(\dfrac{\log x}{x^2}\right)'=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$ ゆえ

$$y-y_0=\frac{1-2\log x_0}{x_0^3}(x-x_0)$$

で与えられる。これが原点を通るので $x=0$，$y=0$ を代入して

$$y_0=\frac{1-2\log x_0}{x_0^3}x_0$$

これから $3\log x_0=1$。すなわち $x_0=e^{\frac{1}{3}}$ で，このとき接線の傾きは $\dfrac{1-2\log e^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{3}{3}}}=\dfrac{1-\frac{2}{3}}{e}=\dfrac{1}{3e}$ となり，求める接線は $y=\dfrac{1}{3e}x$。

問 2　$f(x)=\dfrac{x^3}{3e}-\log x, x>0$ とおくとき，

$$f'(x)=\frac{x^2}{e}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{e}-1\right)$$

ゆえ $f(x)$ の $x>0$ での増減表は以下のとおり。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $e^{\frac{1}{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

よって $x>0$ で $\dfrac{x}{3e}\geqq\dfrac{\log x}{x^2}$ で，等号は $x_0=e^{\frac{1}{3}}$ のときのみ。ゆえに

$S_1$: 問 1 で求めた接線と $x$ 軸および直線 $x=x_0$ で囲まれた三角形の面積

$S_2$: 曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ と $x$ 軸で囲まれ $1\leqq x\leqq x_0$ を満たす部分の面積

とするとき，求める面積は $S_1-S_2$ である。$y_0=\dfrac{\log x_0}{x_0^2}=\dfrac{1}{3e^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{e^{-\frac{2}{3}}}{3}$ とすると，

$$S_1=\frac{1}{2}x_0y_0=\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{6}$$

一方 $S_2$ は部分積分して

$$S_2=\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\frac{\log x}{x^2}dx=\left[-\frac{\log x}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}+\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{3e^{\frac{1}{3}}}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}=1-\frac{4e^{-\frac{1}{3}}}{3}$$

よって求める面積は

$$S_1-S_2=\frac{3e^{-\frac{1}{3}}}{2}-1$$

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

$n$ 進法で表した数の 1 の位が 0 であることと，それが $n$ の倍数であることは同値である。

問 1　2 進法で表しても，3 進法で表しても，5 進法で表しても 1 の位が 0 となる数は，2，3，5 の公倍数である 30 の倍数である。1 から 2016 の中に 30 の倍数は，$2016/30 = 67.2$ より 67 個ある。

問 2　2 の倍数かつ 3 の倍数かつ 5 の倍数でない元の個数を考える。

$M$ の元で，2，3 の公倍数である 6 の倍数の個数は，$2016/6 = 336$ で 336 個。そのうち 5 の倍数は 30 の倍数でもあるから，問 1 より 67 個。従って，2 の倍数かつ 3 の倍数かつ 5 の倍数でない元の個数は $336 - 67 = 269$ 個。

同様に 3 の倍数かつ 5 の倍数で 2 の倍数でない元の個数は，$2016/15 - 67 = 67.4$ となり 67 個。

5 の倍数かつ 2 の倍数で 3 の倍数でない元の個数は，$2016/10 - 67 = 134.6$ で 134 個。

以上を合計すると $269 + 67 + 134 = 470$ 個。

問 3　2 の倍数の個数は $2016/2 = 1008$ 個。問 2，問 1 より，そのうち 3 の倍数であり 5 の倍数でないもの，5 の倍数であり 3 の倍数でないもの，3 の倍数であり 5 の倍数であるものは，それぞれ 269，134，67 個だから，2 の倍数であり，3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数は $1008 - (269 + 134 + 67) = 538$ 個。

同様にして 3 の倍数であり，5 の倍数でも 2 の倍数でもないものの個数は $2016/3 - (67 + 269 + 67) = 269$ 個。

5 の倍数であり，2 の倍数でも 3 の倍数でもないものの個数は $2016/5 - (134 + 67 + 67) = 135.2$ となり 135 個。

以上を合計すると $538 + 269 + 135 = 942$ 個。