平成28年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，60分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　整式 $P(x)$ は，$P\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}$ と $P\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{5}{2}$ を満たす。$P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割った余りを求めよ。

問 2　座標空間内の 3 点 A$(3, 0, 0)$，B$(0, 3, 0)$，C$(1, s, t)$ を頂点とする三角形 ABC の重心を G，原点を O とする。OG⊥AG，OG⊥AB となるときの s と t の値を求めよ。

問 3　変量 x の値が x_1，x_2，x_3 のとき，その平均値を $\overline{x}$ とする。分散 s^2 を

$$\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}$$

で定義するとき，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ となることを示せ。ただし $\overline{x^2}$ は x_1^2，x_2^2，x_3^2 の平均値を表す。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 座標平面上の原点 O，P$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}，\dfrac{1}{2}\right)$，Q$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}，\dfrac{1}{2}\right)$の 3 点を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C_1 とし，原点 O を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　a，b，c の値を求めよ。

問 2　放物線 C_1 と線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ。

問 3　放物線 C_1 と円 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_1 の上側の部分の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
合計	

受　験　番　号

乙 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$P(x)$ を $6x^2+11x-35=(3x-5)(2x+7)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$$P(x)=(3x-5)(2x+7)Q(x)+ax+b$$

である。$P(\frac{5}{3})=\frac{8}{3}$ と $P(-\frac{7}{2})=-\frac{5}{2}$ から，$\frac{5}{3}a+b=\frac{8}{3}$，$-\frac{7}{2}a+b=-\frac{5}{2}$ であり，これを解いて $a=b=1$ を得る。よって余りは $x+1$ である。

問 2　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=(\frac{4}{3},1+\frac{s}{3},\frac{t}{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(-\frac{5}{3},1+\frac{s}{3},\frac{t}{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,3,0)$ である。$\mathrm{OG}\perp\mathrm{AG}$，$\mathrm{OG}\perp\mathrm{AB}$ を内積で表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=-\frac{20}{9}+\left(1+\frac{s}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0\,,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-1+s=0$$

となり，これを解くと $s=1$，$t=\pm 2$ である。

問 3　定義にしたがって計算すると

$$\begin{aligned}
s^2&=\frac{1}{3}\left\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\right\}\\
&=\frac{1}{3}\left\{({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-2(x_1+x_2+x_3)\overline{x}+3(\overline{x})^2\right\}\\
&=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}{3}-2\overline{x}\cdot\frac{x_1+x_2+x_3}{3}+(\overline{x})^2\\
&=\overline{x^2}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+(\overline{x})^2\\
&=\overline{x^2}-(\overline{x})^2
\end{aligned}$$

となり，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ が示された。

$\boxed{2}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1　C_1 は原点を通り，P，Q は y 軸に関して対称な位置にあるから，$b = c = 0$ である。P を通ることから $\frac{1}{2} = a(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ を解いて $a = \frac{2}{3}$ である。

問 2　線分 PQ のグラフは $y = \frac{1}{2}$ の $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ の範囲である。この範囲で，放物線 C_1 は線分の下側にあるから，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) dx &= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) dx \\ &= 2\left[\frac{x}{2} - \frac{2}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{9}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

である。

問 3　2 点 P，Q は C_2 上にあり，したがって C_1 と C_2 の交点である。円 C_2 を線分 OP，OQ で切り取って得られる扇形（線分 PQ を含む側）は，角 POQ が $\frac{2\pi}{3}$ であることから，その面積は $\frac{\pi}{3}$ である。また，三角形 POQ の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$ である。従って円 C_2 を線分 PQ で切り取った上側の面積は $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ である。これと問 2 の結果から，求める面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}$$

である。