平成２８年度入学試験問題（前期日程）

数　学　甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注　意　事　項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120 分である。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 iを虚数単位とし，$z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$とおく。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　z^5および$z^4+z^3+z^2+z+1$の値を求めよ。

問 2　$t=z+\dfrac{1}{z}$とおく。t^2+tの値を求めよ。

問 3　$\cos\dfrac{2\pi}{5}$の値を求めよ。

問 4　半径1の円に内接する正五角形の1辺の長さの2乗を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
問 4	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

2 定積分$\int_{a}^{a+1} |e^{x}-1|\,dx$の値を$I(a)$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　$-1 \leqq a \leqq 0$のとき，$I(a)$をaで表せ。

問 2　aが実数全体を動くとき，$I(a)$を最小にするようなaの値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

3 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　自然数 n に対して $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ。

問 2　$x > 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ が成り立つことを示せ。

問 3　極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x + \log(1+x)}\,dx$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

4 Nを3以上の自然数とする。

1からNまでの数字が1つずつ書かれたN枚のカードを袋に入れ，「無作為に1枚カードを取り出し，そのカードを袋に戻さずに次のカードを取り出す」という作業を3枚のカードを取り出すまで繰り返す。取り出された3枚のカードに書かれた数の最大値をXとする。

また，1からNまでの数字が1つずつ書かれたN枚のカードを袋に入れ，「無作為に1枚カードを取り出してはそれに書かれた数を記録し，袋に戻す」という作業を3回行い，記録された数の最大値をYとする。

nをN以下の自然数とする。$X = n$となる確率をp_nとし，$Y = n$となる確率をq_nとする。

次の問いに答えよ。(50点)

問1 p_3，q_1，q_2，q_3を求めよ。

問2 p_nとq_nを求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

採　点　欄	
数　　学甲	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

甲 解答例

$\boxed{1}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1　ド・モアブルの定理より，

$$
\begin{aligned}
z^5 &= \cos\left(5 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(5 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) \\
&= \cos 2\pi + i\sin 2\pi \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$z^5 - 1 = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$ かつ $z - 1 \neq 0$ なので，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$

問 2

$$
\begin{aligned}
t^2 + t &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) \\
&= z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z^2}\left(z^4 + 2z^2 + 1 + z^3 + z\right) \\
&= \frac{1}{z^2}\left\{(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) + z^2\right\} \\
&= \frac{z^2}{z^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

問 3

$$
\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{t}{2}
$$

問 2 より $t^2 + t - 1 = 0$

$\dfrac{\pi}{2} > \dfrac{2\pi}{5} > 0$ より t は正なので，$t = \dfrac{-1+\sqrt{1^2-4(-1)}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{t}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

問 4　複素平面上で原点を中心とする半径 1 の円に内接する正五角形の頂点は，順に 1，z，z^2，z^3，z^4 で与えられる。従って求める辺の長さの 2 乗は

$$
|z-1|^2 = (z-1)(\overline{z}-1) = z\overline{z} - (z+\overline{z}) + 1 = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{5}
$$

問 3 の結果より

$$
2 - 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2}
$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　関数 e^x は単調増加なので方程式 $e^x-1=0$ の解の前後で符号が変わる。$e^x-1=0$ は $x=0$ を解とするから $x<0$ において $e^x-1<0$，$x>0$ において $e^x-1>0$ となる。従って

$$|e^x-1|=\begin{cases}1-e^x & (x\leqq 0)\\ e^x-1 & (x\geqq 0)\end{cases}$$

これより

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_a^0(1-e^x)dx+\int_0^{a+1}(e^x-1)dx\\&=[x-e^x]_a^0+[e^x-x]_0^{a+1}\\&=0-e^0-(a-e^a)+e^{a+1}-(a+1)-(e^0-0)\\&=-1-a+e^a+e^{a+1}-a-1-1\\&=-2a-3+e^a(1+e)\end{aligned}$$

問 2　$\underline{a\leqq -1\text{ のとき}}$

$$I(a)=\int_a^{a+1}(1-e^x)dx=[x-e^x]_a^{a+1}=a+1-e^{a+1}-(a-e^a)=1-e^a(e-1)$$

この区間では $I(a)$ は単調減少なので，$a=-1$ のとき最小値 $I(-1)=1-e^{-1}(e-1)=e^{-1}$ を取る。

$\underline{-1<a<0\text{ のとき}}$

問 1 より

$$I'(a)=-2+e^a(1+e)$$

$I'(a)=0$ となるのは $e^a=\dfrac{2}{1+e}$ のとき。すなわち，$a=\log\dfrac{2}{1+e}$ のとき。
$\dfrac{1}{e}<\dfrac{2}{1+e}<1$ なので $-1<\log\dfrac{2}{1+e}<0$ である。これをもとにこの区間での $I(a)$ の増減表を書くと以下のようになる。

a	-1	$\cdots$	$\log\dfrac{2}{1+e}$	$\cdots$	0
$I'(a)$		$-$	0	$+$	
$I(a)$	e^{-1}	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$e-2$

よってこの区間では $a=\log\dfrac{2}{1+e}$ のとき最小となる。

$\underline{a\geqq 0\text{ のとき}}$

$$I(a)=\int_a^{a+1}(e^x-1)dx=[e^x-x]_a^{a+1}=e^{a+1}-(a+1)-(e^a-a)=e^a(e-1)-1$$

この区間では単調増加なので $a=0$ で最小値 $e-2$ を取る。

以上より，a が実数全体を動くとき，$I(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\log\dfrac{2}{1+e}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$I'(a)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$I(a)$	$\searrow$	e^{-1}	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$e-2$	$\nearrow$

従って，$I(a)$ は $a=\log\dfrac{2}{1+e}$ のときに最小となる。

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問1

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}dx = \Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \log\frac{2}{n} - \log\frac{1}{n} = \log 2$$

問2 $x \geqq 0$ のとき $f(x) = x - \log(1+x)$, $g(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ と定義する。$x > 0$ で

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

であり $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ なので，$x > 0$ では $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

すなわち問題の不等式が成り立つ。

問3 問2の不等式から $x > 0$ のとき

$$2x - \frac{x^2}{2} < x + \log(1+x) < 2x$$

また $0 < x < 4$ のとき $2x - \dfrac{x^2}{2} = 2x\left(1 - \dfrac{x}{4}\right) > 0$ ゆえ，$0 < x < 4$ ならば

$$\frac{1}{2x} < \frac{1}{x + \log(1+x)} < \frac{1}{2x - \frac{x^2}{2}}$$

が成り立つ。よって

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x}dx < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x + \log(1+x)}dx < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x - \frac{x^2}{2}}dx$$

ここで

$$\frac{1}{2x - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right)$$

ゆえ

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x - \frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2}\left([\log x]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} - [\log(4-x)]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\right) = \frac{1}{2}\log 2 - \log\left(4 - \frac{2}{n}\right) + \log\left(4 - \frac{1}{n}\right)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x - \frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2}\log 2$$

一方，問1から

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\log 2$$

ゆえに，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x + \log(1+x)}dx = \frac{1}{2}\log 2$$

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問1　$X=3$ となるのは，取り出された3枚のカードが1，2，3のときで，その取り出し方は全部で6通り。一方，3枚のカードを順に取り出す取り出し方は ${}_NP_3 = N(N-1)(N-2)$ 通りある。よって $p_3 = \dfrac{6}{N(N-1)(N-2)}$。

$Y=1$ となるのは，取り出したカードが3回とも1のとき。カードを取り出す取り出し方は N^3 通りあるので，$q_1 = \dfrac{1}{N^3}$

$Y=2$ となるのは，取り出したカードが3回とも1か2で，そのうち3回とも1である場合は除かれるから $2^3-1=7$ 通り。カードを取り出す取り出し方は N^3 通りあるので，$q_2 = \dfrac{7}{N^3}$

$Y=3$ となるのは，取り出したカードが3回とも1から3のいずれかで，そのうち3回とも1または2である場合は取り除かれるから $3^3-2^3=19$ 通り。カードを取り出す取り出し方は N^3 通りあるので，$q_3 = \dfrac{19}{N^3}$

問2　$n \geqq 3$ のとき $X=n$ となるのは，取り出した3枚のうち1枚が n で残りの2枚は n 未満のとき。1枚目が n で2枚目と3枚目に n 未満のカードを取り出す取り出し方は $(n-1)(n-2)$ 通り。2枚目，3枚目に取り出されるカードが n の場合もその他のカードが n 未満である取り出し方は同じ数だけあるので，$X=n$ となる取り出し方は $3(n-1)(n-2)$ 通り。よって $p_n = \dfrac{3(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$。$p_1=p_2=0$ となるので，これは $n=1,2$ のときも成り立つ。

$n \geqq 2$ のとき $Y=n$ となるのは，取り出したカードが3回とも1から n のいずれかで，そのうち3回とも1から $n-1$ である場合は除かれるから，$n^3-(n-1)^3 = 3n^2-3n+1$ 通り。カードを取り出す取り出し方は N^3 通りあるので，$q_n = \dfrac{3n^2-3n+1}{N^3}$。問1から $q_1=1$ なので，これは $n=1$ のときも成り立つ。