平 成 2 7 年 度 入 学 試 験 問 題 (後期日程)

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 関数$f(x)=x^3+3ax^2+15x$について，次の問いに答えよ。(50点)

問 1 $f(x)$が極大値，極小値をともにもつように，aの値の範囲を求めよ。

問 2 問1のaの値の範囲において，$f(x)$の極大値と極小値の和をaを用いて表せ。

問 3 $f(x)$の極大値と極小値の和が-18のとき，aの値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$\cos 3x$，$\cos 4x$，$\cos 5x$ を $\cos x$ の式で表せ。

問 2　$\cos \dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

3 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　x に関する方程式 $a\sin 2x = \sin x$ が $0 < x < \pi$ の範囲で解をもつように，a の値の範囲を求めよ。

問 2　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2 つの曲線 $y = a\sin 2x$ と $y = \sin x$ で囲まれた部分の面積を a で表せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

4 $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\log t}$ $(x>1)$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　$f'(x)$を求めよ。

問 2　不等式$\int_x^{x^2}\frac{dt}{t}<f(x)$を証明し，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$を示せ。

問 3　$x>1$のとき，$\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\log t}$を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

後期 解答例 ©琉球大学理学部数理科学科，琉球大学教育学部数学専修

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 15$ だから，$f(x)$ が極大値，極小値を持つ必要十分条件は，$f'(x) = 0$ が異なる 2 実解を持つときである．判別式を考えて，$\dfrac{D}{4} = 9a^2 - 45 = 9(a^2 - 5) > 0$ となる a が求める条件で，これを解くと，$|a| > \sqrt{5}$

問 2　$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 15 = 0$ の 2 実解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，解と係数の関係より，$\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = 5$ であり，極大値は $f(\alpha)$，極小値は $f(\beta)$ である．これらの和は，

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + \beta^3 + 3a(\alpha^2 + \beta^2) + 15(\alpha + \beta) \\ &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3a\left\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\right\} + 15(\alpha + \beta) \\ &= (-2a)^3 - 3 \cdot 5 \cdot (-2a) + 3a\{(-2a)^2 - 2 \cdot 5\} + 15(-2a) \\ &= 4a^3 - 30a \end{aligned}$$

問 3　問 2 の結果より $4a^3 - 30a = -18$，すなわち，$4a^3 - 30a + 18 = 2(a+3)(2a^2 - 6a + 3) = 0$．従って，$a = -3$ もしくは $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$．ここで，$-3 < -\sqrt{5} < \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} < \sqrt{5} < \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$ なので，問 1 の結果より，求める a は，$a = -3$ または $a = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=(2\cos^2 x-1)\cos x-2\sin^2 x\cos x\\&= 4\cos^3 x-3\cos x\\\cos 4x &= 2\cos^2 2x-1=2(2\cos^2 x-1)^2-1\\&= 8\cos^4 x-8\cos^2 x+1\\\cos 5x &= \cos 4x\cos x-\sin 4x\sin x\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\sin 4x\sin x &= 2\sin 2x\cos 2x\sin x=4\sin x\cos x(2\cos^2 x-1)\sin x\\&= 4(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)\cos x=-8\cos^5 x+12\cos^3 x-4\cos x\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}\cos 5x &= 8\cos^5 x-8\cos^3 x+\cos x+8\cos^5 x-12\cos^3 x+4\cos x\\&= 16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x\end{aligned}$$

問 2　$\cos\frac{5\pi}{10}=0$ であるので, 問 1 の $\cos 5x$ の式から, $\cos\frac{\pi}{10}$ は, 方程式 $16X^5-20X^3+5X=0$ を満たす. $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0$ なので, $\cos\frac{\pi}{10}$ は, 方程式 $16X^4-20X^2+5=0$ を満たす. これを解くと, $X^2=\frac{10\pm\sqrt{20}}{16}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$ である. $\cos^2\frac{\pi}{10}>\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}$ であるが, $\frac{5-\sqrt{5}}{8}<\frac{3}{4}<\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ なので, $\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ となり, $\cos\frac{\pi}{10}>0$ より, $\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ である.

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$a=0$ の時には, 明らかに解は存在しない. $a \neq 0$ とする. $2a\sin 2x = 2a\sin x\cos x$ だから, $2a\sin x\cos x = \sin x$, すなわち, $\sin x(2a\cos x - 1) = 0$ が $0 < x < \pi$ で解を持つ条件を求めれば良い. この範囲で, $0 < \sin x < 1$, $-1 < \cos x < 1$ なので, $2a\cos x - 1 = 2a\left(\cos x - \dfrac{1}{2a}\right) = 0$ が成立する x が存在する条件を求めれば良い. $\cos x$ の取り得る値の範囲から, $-1 < \dfrac{1}{2a} < 1$ となり, $|a| > \dfrac{1}{2}$ である.

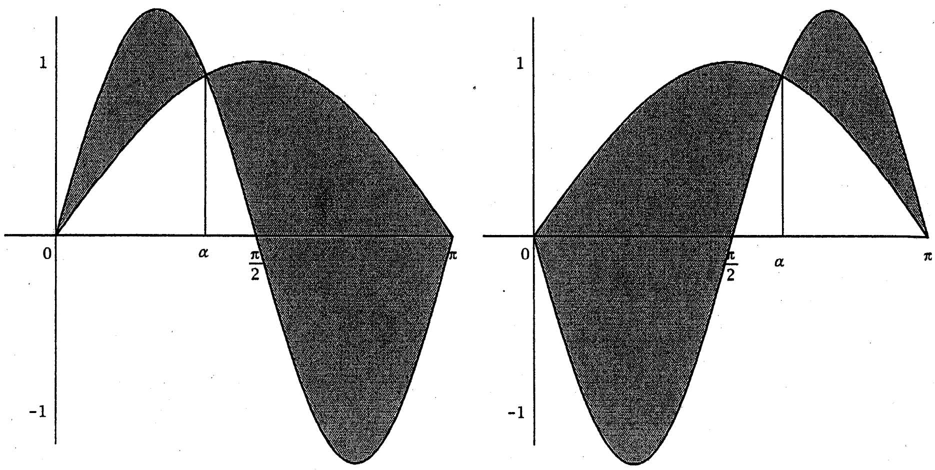
問 2　$a > \dfrac{1}{2}$ のとき, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2a}$ となる角 α を $0 < \alpha < \pi$ の範囲で取ると, 下の左の図より求める面積は,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\alpha}(a\sin 2x - \sin x)\,dx + \int_{\alpha}^{\pi}(\sin x - a\sin 2x)\,dx \\
= & \left[-\frac{a}{2}\cos 2x + \cos x\right]_0^{\alpha} + \left[\frac{a}{2}\cos 2x - \cos x\right]_{\alpha}^{\pi} \\
= & -\frac{a}{2}\cos 2\alpha + \cos\alpha + \frac{a}{2} - 1 - \frac{a}{2} + 1 - \frac{a}{2}\cos 2\alpha + \cos\alpha \\
= & \ a - a(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos\alpha = 2a + \frac{1}{2a}
\end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき, $0 \leqq x \leqq \pi$ で $\sin x \geqq a\sin 2x$ なので求める面積は,

$$\int_0^{\pi}(\sin x - a\sin 2x)dx = \left[-\cos x + \frac{a}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 2$$

$a < -\dfrac{1}{2}$ のとき, 下の右の図より最初の計算と符号が変わるだけなので,
求める面積は $-2a - \dfrac{1}{2a}$



$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$F(t) = \displaystyle\int \frac{dt}{\log t}$ とおくと，$F'(t) = \dfrac{1}{\log t}$ で，$f(x) = F(x^2) - F(x)$ である．従って，$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \dfrac{x-1}{\log x}$

問 2　$t > 1$ のとき，$t > \log t > 0$ である．実際，$h(t) = t - \log t$ とおくと，$h(1) = 1 > 0$ であり，$t > 1$ において，$h'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} > 0$ となるので，$h(t)$ は $t > 1$ で単調増加となり，$t > 1$ で，$h(t) > 1 > 0$ である．従って，$\dfrac{1}{\log t} > \dfrac{1}{t} > 0$. $x > 1$ なので，$x^2 > x$. よって，

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t} > \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}.$$

この不等式より，$f(x) > \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = [\log t]_x^{x^2} = \log x^2 - \log x = \log x$. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ だから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

問 3

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\log t} = [\log(\log t)]_x^{x^2} = \log(\log x^2) - \log(\log x) = \log 2 + \log(\log x) - \log(\log x) = \log 2$$