平成27年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　3 次方程式 $x^3 - ax - 6 = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ。

問 2　$\log_2 \frac{1}{6} + \log_2 \frac{3}{4}$ の値を求めよ。

問 3　平面上に 3 点 O$(0,0)$，A$(1,\sqrt{3})$，P$(\cos\theta, \sin\theta)$をとる。$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 頂点が点A(0, 4)で，点B(2, 0)を通る放物線を考える。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　この放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

問 2　この放物線上にあり，x 座標が $2a$ $(a > 0)$ である点をCとする。この放物線と x 軸との交点で，点Bと異なる点をDとする。点Cにおける放物線の接線 l_1 と点Dにおける放物線の接線 l_2 との交点Eの座標を，a を使って表せ。

問 3　この放物線と直線 l_2，および点Eを通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採	点 欄
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
合計	

受　験　番　号

乙 解答例

1 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $x^3 - ax - 6 = 0$ に $x = -1$ を代入して，$a = 7$

$x^3 - 7x - 6$ を $x + 1$ で割ると，$x^2 - x - 6$ だから，

$x^2 - x - 6 = 0$ を解いて，他の解は $x = -2,\ 3$ である。

問 2
$$\log_2 \frac{1}{6} + \log_2 \frac{3}{4} = \log_2 \left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$$

問 3
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = r\sin(\theta + \alpha)$ とおくと $r = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

よって

$$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ だから $\theta + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$，つまり $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値 2

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　頂点の座標 A$(0,4)$ より，2 次関数は $y=px^2+4$ とかける。

これが B$(2,0)$ を通るから，　これを代入して $p=-1$

よって求める 2 次関数は $y=-x^2+4$

問 2　C$(2a,\ -4a^2+4)$，$y'=-2x$ より

$$y-(-4a^2+4)=-2\cdot 2a(x-2a)$$

$$l_1 : y=-4ax+4a^2+4$$

また，D$(-2,\ 0)$ より

$$l_2 : y=-2\cdot(-2)(x+2)=4x+8$$

これを連立させて $-4ax+4a^2+4=4x+8$ より $(a+1)x=a^2-1$

$a>0$ より $a+1\neq 0$ だから，両辺をこれで割って $x=a-1$

これを l_2 の方程式に代入して $y=4a+4$

よって l_1 と l_2 の交点の座標は E$(a-1,\ 4a+4)$

問 3

$$\int_{-2}^{a-1}(4x+8+x^2-4)dx=\int_{-2}^{a-1}(x^2+4x+4)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right]_{-2}^{a-1}$$

$$=\frac{1}{3}\left((a-1)^3+8\right)+2\left((a-1)^2-4\right)+4(a-1+2)=\frac{a^3}{3}+a^2+a+\frac{1}{3}$$

$$\left(=\frac{(a+1)^3}{3}\right)$$