平成２７年度入学試験問題（前期日程）

数　学　甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $F(x)=\int_x^{2x} e^t dt$ とするとき，$F(1)$ および $F'(x)$ を求めよ。

問 2 関数 $f(x)$，$g(x)$ が，

$$\begin{cases} f(x)+\int_0^x g(t)\,dt = 2\sin x - 3 \\ f'(x)g(x)=\cos^2 x \end{cases}$$

を満たすとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 関数 $f(x) = |x|\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $f(x)$ の増減を調べ，最大値，最小値を求めよ。

問 2 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

3 確率 p $(0 < p < 1)$ で「当たり」が出るくじを繰り返して引く。2回目の「当たり」が出たときにこの試行を終える。$n \geqq 2$ として，n 回目でこの試行を終える確率を p_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　p_2，p_3，p_4 を求めよ。

問 2　p_n を求めよ。

問 3　$N \geqq 2$ として，$\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

4 tを媒介変数として，$x = t + \dfrac{1}{t} + \dfrac{5}{2}$，$y = 2t - \dfrac{2}{t}$で表される曲線を考える。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　tを消去して，xとyの関係式を求めよ。

問 2　aを定数とするとき，直線$y = ax + 5$とこの曲線との共有点の個数を調べよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

採　点　欄	
数　　学甲	
1	
2	
3	
4	
合計	

受験番号

甲 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $F(x) = \int_x^{2x} e^t \, dt = \left[e^t \right]_x^{2x} = e^{2x} - e^x$ だから, $F(1) = e^2 - e$, $F'(x) = 2e^{2x} - e^x$

問 2 $f(x) + \int_0^x g(t) \, dt = 2\sin x - 3$ の両辺を微分して, $f'(x) + g(x) = 2\cos x$ より,

$$f'(x) = 2\cos x - g(x)$$

これを問題文の下の式に代入して, $2g(x)\cos x - (g(x))^2 = \cos^2 x$

すなわち, $(\cos x - g(x))^2 = 0$ となるので, $g(x) = \cos x$

$$f(x) + \int_0^x g(t) \, dt = f(x) + \int_0^x \cos x \, dx = f(x) + [\sin x]_0^x = f(x) + \sin x = 2\sin x - 3$$

だから, $f(x) = \sin x - 3$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき, $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ なので,

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1)$$

となる. 同様に $-1 \leqq x < 0$ のとき, $f(x) = -x\sqrt{1-x^2}$ なので,

$f'(x) = \dfrac{2\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$　$(-1 < x < 0)$ である. 従って増減表は次で与えられる.

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	極大	↘	

ここで, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$ なので, 最大値は $\dfrac{1}{2}$ $(x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}})$,
最小値は 0 $(x = 0, \pm 1)$.

問 2　$\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ なので,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= -\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　p_2 は, 当たりが 2 度続けて出る確率だから, $p_2 = p^2$

3 回目でこの試行が終るのは, 当たり, はずれ, 当たりの順に引くか, はずれ, 当たり, 当たりの順に引くかのいずれかであり, これらは排反なので, $p_3 = p(1-p)p+(1-p)p^2 = 2p^2(1-p)$

同様に 4 回目で終るのは, 当たり, はずれ, はずれ, 当たりの順に引くか, はずれ, 当たり, はずれ, 当たりの順に引くか, はずれ, はずれ, 当たり, 当たりの順に引くかのいずれかであり, これらは排反なので, $p_4 = p(1-p)^2p + (1-p)p(1-p)p + (1-p)^2p^2 = 3p^2(1-p)^2$

問 2　n 回目で試行が終るのは, $n-1$ 回目までにちょうど 1 回当たりが出て, さらに n 回目に当たりが出る場合である. $n-1$ 回目までの試行で, k 回目 $(1 \leqq k \leqq n-1)$ だけ当たりが出る確率は, $(1-p)^{n-2}p$ である. k の取り方は, $n-1$ 通りあるので, $n-1$ 回目までにちょうど 1 回当たりが出る確率は, $(n-1)p(1-p)^{n-2}$ である. 従って, 求める確率は, $p_n = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$ である.

問 3　$S_N = \displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k$ とおく.

$$
\begin{aligned}
S_N &= p^2\left\{1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \cdots + (N-1)(1-p)^{N-2}\right\} \\
(1-p)S_N &= \quad p^2\left\{(1-p) + 2(1-p)^2 + \cdots + (N-2)(1-p)^{N-2} + (N-1)(1-p)^{N-1}\right\}
\end{aligned}
$$

上の式から下の式の両辺を引き算すると,

$$
\begin{aligned}
pS_N &= p^2\left\{1 + (1-p) + \cdots + (1-p)^{N-2}\right\} - (N-1)(1-p)^{N-1} \\
&= p^2\frac{1-(1-p)^{N-1}}{1-(1-p)} - p^2(N-1)(1-p)^{N-1}
\end{aligned}
$$

この両辺を $p(\neq 0)$ で割って, $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k = 1 - (1-p)^{N-1} - (N-1)p(1-p)^{N-1}$

[別解] 求める和は, k $(k = 1, \ldots, N)$ 回目でちょうど 2 回目の当たりが出る確率の総和であり, これは, N 回の試行で全く当たりを引かない事象と, ちょうど 1 回だけ引く事象の余事象である. さらにこれらの事象は互いに排反である. 全く当たりを引かない確率は $(1-p)^N$ であり, ちょうど 1 回だけ当たりを引く確率は, 問 2 の考察と同様にして, $Np(1-p)^{N-1}$ である. 従って求める和は, $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k = 1 - (1-p)^N - Np(1-p)^{N-1}$ となる. この結果と上の結果は $(1-p)^N = (1-p)^{N-1}\cdot(1-p) = (1-p)^{N-1} - p(1-p)^{N-1}$ より, 一致する.

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$x-\dfrac{5}{2}=t+\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{y}{2}=t-\dfrac{1}{t}$. これらの式の両辺を 2 乗して引き算すると,

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=4$$

[注] 逆に 2 次曲線 $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=4$ の上にある点 (p,q) に対して, $t=\dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{q}{4}$ (このとき, $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}\left(p-\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{q}{4}$) とおけば, $t+\dfrac{1}{t}=p-\dfrac{5}{2}$, $t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{q}{2}$ となるので, 媒介変数 t に対応する点は (p,q) となるが, このことを解答に書くことは要求していない.

問 2　$y=ax+5$ を上の関係式に代入して 4 倍すると, $(2x-5)^2-(ax+5)^2=16$. 従って, 共有点の個数は方程式 $(4-a^2)x^2-10(a+2)x-16=0$ の実数解の個数である.

- $4-a^2=0$, すなわち, $a=\pm2$ のとき.

  $a=-2$ の時には, 方程式は, $0x^2+0x-16=0$ となるから, 解が無い. すなわち, 共有点を持たない.

  $a=2$ のとき.

  方程式は, $-40x-16=0$ となるので, $x=-\dfrac{2}{5}$ がただ 1 つの解である. すなわち, 共有点は 1 つ.

- $4-a^2\neq0$ のとき, この時には, 2 次方程式 $(4-a^2)x^2-10(a+2)x-16=0$ の実数解の個数を考えればよい. 判別式を考えて $\dfrac{D}{4}=25(a+2)^2+16(4-a^2)=9a^2+100a+164=(a+2)(9a+82)$ となる. 従って,

  $a<-\dfrac{82}{9}$ または, $a>-2$ で $a\neq2$ のとき, 解が 2 個あるので, 共有点は 2 個.

  $a=-\dfrac{82}{9}$ のとき, 解が 1 つなので, 共有点は 1 個.

  $-\dfrac{82}{9}<a<-2$ のとき, 解が無いので, 共有点は無し.