平成26年度入学試験問題（後期日程）

数　学（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ の n 乗を $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$ とする。また，$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$ として，$B=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$AM=MB$ かつ $xw-yz\neq 0$ をみたす行列 $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ。

問 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}$ の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

◇M4(349—33)

1 解答欄

問 1

問 2

2 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ。

問 2 定積分 $\displaystyle\int_{\cos\frac{5\pi}{12}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\cos\frac{\pi}{12}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ。

問 3 次の定積分 A，B について，A は B より大きいか，小さいか，等しいか，理由を付けて答えよ。

$$A = \int_0^{\cos\frac{2\pi}{5}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{\cos\frac{\pi}{10}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$B = \int_{\cos\frac{2\pi}{5}}^{\cos\frac{3\pi}{10}} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{\cos\frac{\pi}{5}}^{\cos\frac{\pi}{10}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　正三角形 ABC の辺 BC の 3 等分点を，B に近い方から順に D，E とする。∠DAE は 20° より大きいか，小さいか，等しいか，理由を付けて答えよ。

問 2　xy 平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = 4$，$C_2 : x^2 + (y - 4)^2 = 1$ がある。C_1 と C_2 の共通接線のうち，C_1 と第 1 象限で接し，C_2 と第 2 象限で接するような接線の方程式を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

4 数列$\{a_n\}$は，相異なる3の累乗3^d（指数dは0または正の整数）の和で表される整数を，小さい順に並べて定められている。つまり，

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 1 + 3 = 4,\ a_4 = 3^2 = 9,\ a_5 = 1 + 3^2 = 10,\ a_6 = 3 + 3^2 = 12,\ \cdots\cdots$$

である。次の問いに答えよ。(50点)

問1　a_nを相異なる3の累乗の和で表す表し方は，ただ1通りであることを証明せよ。

問2　第50項a_{50}を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

数学（後期日程）解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1. $AM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+w \\ 2x+z & 2y+w \end{pmatrix}$, $MB = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})x & (2-\sqrt{3})y \\ (2+\sqrt{3})z & (2-\sqrt{3})w \end{pmatrix}$ なので, $AM = MB$ は, $z = (\sqrt{3}-1)x$, $-w = (\sqrt{3}+1)y$ と同値である。よって, $AM = MB$ かつ $xw - yz \neq 0$ をみたす M として, 例えば $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$ が条件をみたす。(他に, $\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3}+1 \\ -\sqrt{3}+1 & 2 \end{pmatrix}$ などでもよい。)

問 2. $A = MBM^{-1}$ より

$$
\begin{aligned}
A^n &= (MBM^{-1})^n = M \cdot B^n \cdot M^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha^n & -\beta^n \\ (\sqrt{3}-1)\alpha^n & (\sqrt{3}+1)\beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 1 \\ -\sqrt{3}+1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \\
&= \begin{pmatrix} (\sqrt{3}+1)\alpha^n + (\sqrt{3}-1)\beta^n & \alpha^n - \beta^n \\ 2\alpha^n - 2\beta^n & (\sqrt{3}-1)\alpha^n + (\sqrt{3}+1)\beta^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\alpha = 2+\sqrt{3} > \beta = 2-\sqrt{3} > 0$ なので、$\lim_{n\to\infty} (\frac{\beta}{\alpha})^n = 0$。よって

$$
\frac{a_n}{c_n} = \frac{(\sqrt{3}+1)\alpha^n + (\sqrt{3}-1)\beta^n}{2(\alpha^n - \beta^n)} = \frac{(\sqrt{3}+1) + \sqrt{3}-1)(\frac{\beta}{\alpha})^n}{2(1-(\frac{\beta}{\alpha})^n)} \to \frac{\sqrt{3}+1}{2} \; (n \to \infty)
$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

$a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$ $(\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta > 0)$ のとき、$x = \cos t$ で置換積分すると

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sin t\cdot(-\sin t)\,dt = \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha (1-\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}[t - \frac{\sin 2t}{2}]_\beta^\alpha = \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{4} \qquad (*)$$

問 1 . $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ なので, (*) で $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ として,

$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{12}$

問 2. (*) で $\alpha = \frac{5\pi}{12}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, および $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{12}$ として

$\frac{1}{2}(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{4}(\sin\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{2\pi}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}) - \frac{1}{4}(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{12}\cdot 2 = \frac{\pi}{12}$

問 3. (*) の sin の部分は打ち消しあうので, A と B は等しい。実際, A は $(\alpha,\beta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5})$, $(\frac{\pi}{10}, 0)$, B は $(\alpha,\beta) = (\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{10})$, $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{10})$ として

$$A = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} - 0) - \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} - \sin 0) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{10}\cdot 2 = \frac{\pi}{10}$$

$$B = \frac{1}{2}(\frac{2\pi}{5} - \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10}) - \frac{1}{4}(\sin\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{10}\cdot 2 = \frac{\pi}{10}$$

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1. △ABD と △ADE は底辺と高さが等しい三角形なので面積が等しい。よって, $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AD} = b$, $\angle\mathrm{BAD} = \alpha$, $\angle\mathrm{DAE} = \beta$ とすると, $\frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}b^2\sin\beta \leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b}{a} < 1$ である。$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{3}$ なので $\sin\alpha < \sin\beta$, よって $\alpha < \beta$ となる。一方, $2\alpha + \beta = 60°$ なので $\beta > 20° > \alpha$ となり, $\beta = \angle\mathrm{DAE}$ は $20°$ より大きい。(座標を設定し, 内積を使って $\cos\angle\mathrm{BAD}$ と $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を比較して, または正弦, 余弦定理からも導ける。)

問 2. 円 C_1, C_2 の中心を O, O′, 求める共通接線の接点を P, Q とする。OP と O′Q は平行なので, 接点は $\mathrm{P}(2\cos\theta, 2\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(-\cos\theta, 4 - \sin\theta)$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおける。

点 P で C_1 に接する接線は、

$$2x\cos\theta + 2y\sin\theta = 4 \quad \leftrightarrow \quad x\cos\theta + y\sin\theta = 2 \tag{1}$$

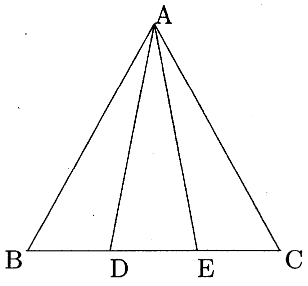
点 Q で C_2 に接する接線は、

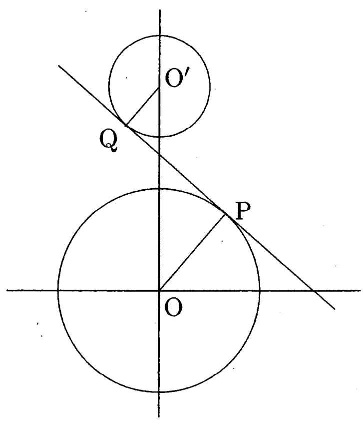
$$-x\cos\theta - (y-4)\sin\theta = 1 \quad \leftrightarrow \quad x\cos\theta + y\sin\theta = 4\sin\theta - 1 \tag{2}$$

(1),(2) が一致するので, $2 = 4\sin\theta - 1$ より $\sin\theta = \frac{3}{4}$, 従って, $\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} > 0$ である。これらを (1) に代入して,

$$\frac{\sqrt{7}}{4}x + \frac{3}{4}y = 2 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{7}x + 3y = 8$$

(三角形の相似を使って, または接線と円の方程式から導かれる２次方程式の判別式が零の条件からも答が得られる。)





$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1. a_n が 2 通りに表されたとする：

$$a_n = 3^{r_1} + \cdots + 3^{r_k} = 3^{s_1} + \cdots + 3^{s_l} \quad (r_1 < \cdots < r_k, s_1 < \cdots < s_l)$$

$r_k = s_l$ ならば両辺から $3^{r_k} = 3^{s_l}$ を省いて $r_k < s_l$ としてよい。すると, $3^{r_1} + \cdots + 3^{r_k} \leqq 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{r_k} = \dfrac{3^{r_k+1} - 1}{2} < 3^{s_l} \leqq 3^{s_1} + \cdots + 3^{s_l}$ となり矛盾。

問 2. 小さい方から 5 個の 3 の累乗 $1, 3, 9, 27, 81$ を使ってできる和は全部で, ${}_5C_1 + {}_5C_2 + \cdots + {}_5C_5 = 2^5 - 1 = 31$ 個あるので, $a_{32} = 3^5 = 243$ となる。243 と $1, 3, 9, 27$ を使ってできる和は ${}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4 = 2^4 - 1 = 15$ 個あるので, 第 $32+15 = 47$ 項は, $a_{47} = 1+3+9+27+243 = 283$ である。よって, $a_{48} = 243 + 81 = 324$, $a_{49} = 324 + 1$, $a_{50} = 324 + 3 = 327$ である。

（3 進表示を使う解答）a_n は 3 進法で表したとき 0 と 1 だけからなる自然数である。自然数を 2 進法で書いて, それを 3 進法として読んだ自然数に対応させる写像は大小関係を保って 1 対 1 である。$50 = 32 + 16 + 2 = 110010_{(2)}$ なので, $a_{50} = 110010_{(3)} = 243 + 81 + 3 = 327$ である。