平成26年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 $\triangle$ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E とし，線分 CD，BE の交点を P とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\overrightarrow{AP}$ を，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

問 2 $AB = 3$，$AC = 4$，$AP = \sqrt{7}$ のとき，$\angle BAC$ の大きさを求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 a，b を実数とし，放物線 $y = x(x - a)$ を C とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 C 上の点 $(t,\ t(t - a))$ における C の接線の方程式を求めよ。

問 2 点 $(b,\ 0)$ から C に，相異なる 2 本の接線が引けるとする。このとき a，b がみたす不等式を求め，その不等式が表す領域を，解答欄の ab 平面に図示せよ。

問 3 C と x 軸が囲む部分の面積を $S(a)$ とする。関数 $y = S(a)\ (-2 \leqq a \leqq 2)$ のグラフをかけ。

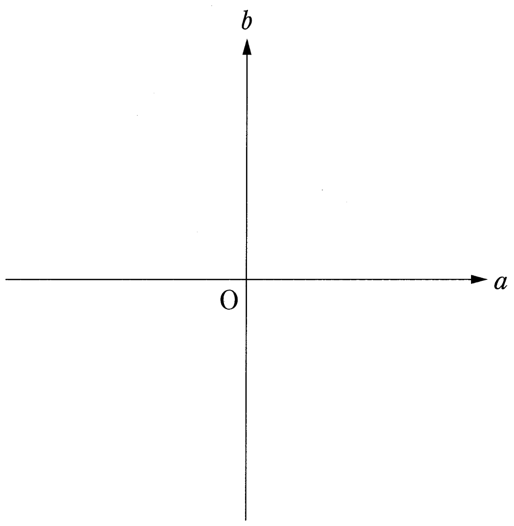
(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採 点 欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2



問 3

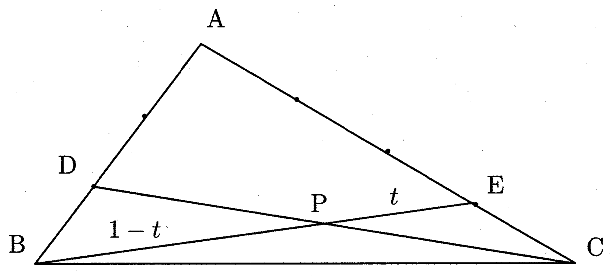
採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
合計	

受験番号

数学（乙）解答例

$\boxed{1}$ [解法が下記のものと異なっていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1



まず，点 P は直線 BE 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}} = t \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + (1-t) \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表すことができる。ここで，P は直線 CD 上の点でもあるから，

$$t \cdot \frac{3}{2} + (1-t) \cdot \frac{3}{4} = 1$$

$$\therefore\ t = \frac{1}{3}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t) \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

問 2　問 1 および $\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{AC} = 4$ により，

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\ &= \frac{1}{9} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{aligned}$$

これが $(\sqrt{7})^2 = 7$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3(7-1-4) = 6$$

よって，

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$$

$\boxed{2}$ [解法が下記のものと異なっていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問1 $y = x(x-a)$ を微分して $y' = 2x - a$ より，求める接線は

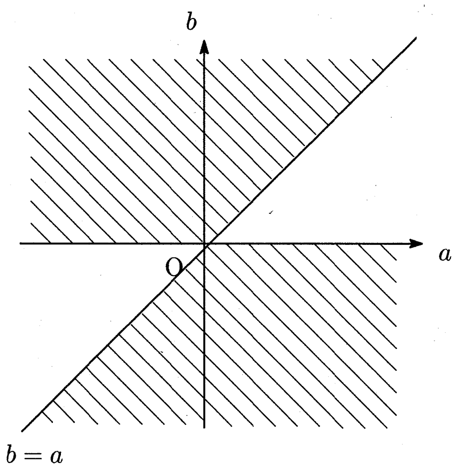
$$y = (2t-a)(x-t) + t(t-a)$$

すなわち $y = (2t-a)x - t^2$ である。

問2 前問の接線の式に $(x, y) = (b, 0)$ を代入して整理すると

$$t^2 - 2bt + ab = 0 \tag{1}$$

となる。a, b のみたす条件は, t の2次方程式 (1) が異なる2つの実数解をもつ, すなわち判別式 $(2b)^2 - 4(ab)$ が正であることである。 したがって $b(b-a) > 0$ である。



図の斜線部分。境界は含まない。

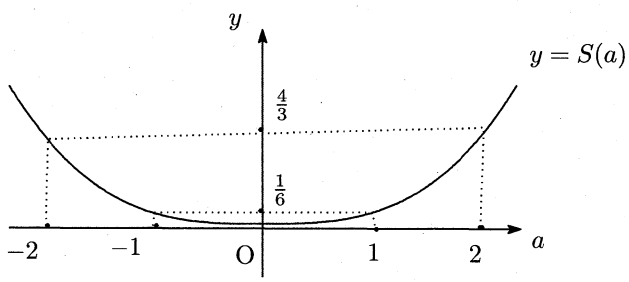
問3 $a \geqq 0$ のとき,

$$S(a) = \int_0^a -x(x-a)dx = \int_0^a (-x^2 + ax)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^3}{6}$$

同様に $a < 0$ のとき,

$$S(a) = \int_a^0 -x(x-a)dx = \int_a^0 (-x^2 + ax)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right]_a^0 = -\frac{a^3}{6}$$

両方合わせて，$S(a) = \left|\dfrac{a^3}{6}\right|$ である。



y
y = S(a)
4/3
1/6
−2
−1
O
1
2
a