平 成 2 5 年 度 入 学 試 験 問 題 (後期日程)

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 関数 $y=4x^3-x^4$ について，次の問いに答えよ。(50点)

問 1　$y=4x^3-x^4$ のグラフの概形を，極値，変曲点，凹凸を調べてかけ。

問 2　a を定数とするとき，直線 $y=ax$ と曲線 $y=4x^3-x^4$ との共有点の個数を調べよ。ただし，接点は1個の共有点とみなす。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 辺の長さがすべて整数である直角三角形の面積は，3で割り切れる整数であることを示せ。(50点)

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
小計	

2 解答欄

3 四面体ABCDにおいて，三角形BCDの3辺の長さは3，4，5である。また，Aから対面BCDに下ろした垂線の足Hは三角形BCDの内心に一致している。AHの長さをhとする。この四面体をAHを軸として一回転したとき，この四面体の表面が通過した部分の体積を求めよ。(50点)

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
小計	

3 解答欄

4 次のゲームを考える。

- 最初の持ち点は1である。
- コインを投げて，表が出れば持ち点を倍に，裏が出れば持ち点を半分にする。ただし，持ち点が1のときに裏が出たら持ち点は0になるものとする。

コインをn回投げたときの持ち点が1である確率を$p(n)$，コインをn回投げたときの持ち点の期待値を$\mathrm{E}(n)$とする。このとき，次の問いに答えよ。(50点)

問1　$p(4)$を求めよ。

問2　$\mathrm{E}(n+1)=\dfrac{5}{4}\mathrm{E}(n)-\dfrac{1}{4}p(n)$であることを示せ。

問3　$\mathrm{E}(7)$を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 **解答欄**

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

数学（後期日程）解答例

$\boxed{1}$ 関数 $y = 4x^3 - x^4$ について, 次の問いに答えよ。　(50 点)

問 1 $y = 4x^3 - x^4$ のグラフの概形を, 極値, 変曲点, 凹凸を調べてかけ。

問 2 a を定数とするとき, 直線 $y = ax$ と曲線 $y = 4x^3 - x^4$ との共有点の個数を調べよ。ただし, 接点は 1 個の共有点とみなす。

解答例

[これと解法が違っていても, 同じ結論が正しい論理によって導かれていれば正解です。]

問 1 $y = f(x) = 4x^3 - x^4$ とおく。

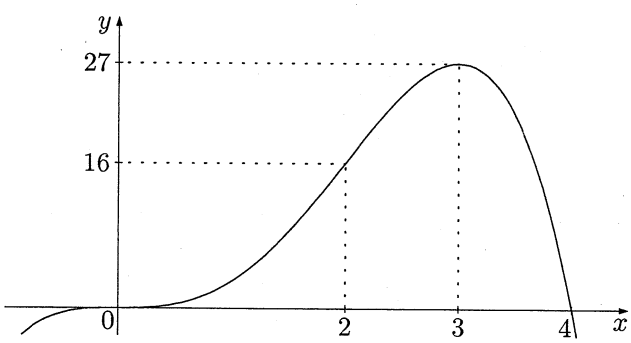
$$f(x) = 4x^3 - x^4 = x^3(4-x),$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3-x),$$
$$f''(x) = 24x - 12x^2 = 12x(2-x)$$

である。増減表を書くと,

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↗	変曲点	↗	変曲点	↗	極大	↘

$$f(2) = 32 - 16 = 16,$$
$$f(3) = 4 \cdot 27 - 3 \cdot 27 = 27$$

となる。グラフは



問 2 共有点の x 座標は $ax = 4x^3 - x^4$ をみたす。

$x = 0$ は常に共有点である。

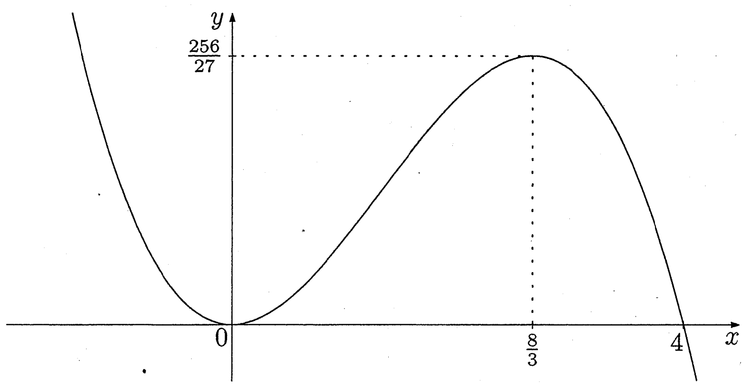
$x \neq 0$ のときは $a = 4x^2 - x^3$ をみたす。

$g(x) = 4x^2 - x^3$ とおく。$g'(x) = 8x - 3x^2 = x(8-3x)$ である。$g(x)$ の増減表は

x		0		$\frac{8}{3}$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	0	↗		↘

$$g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256}{27}$$

となり, グラフは



である。共有点の個数は

$$\begin{cases} a \leqq 0 & 2\,個 \\ 0 < a < \frac{256}{27} & 4\,個 \\ a = \frac{256}{27} & 3\,個 \\ a > \frac{256}{27} & 2\,個 \end{cases}$$

2 辺の長さがすべて整数である直角三角形の面積は, 3 で割り切れる整数であることを示せ。(50 点)

解答例

[これと解法が違っていても, 同じ結論が正しい論理によって導かれていれば正解です。]

斜辺の長さを a, 残りの二辺の長さを b, c とすると, $a^2 = b^2 + c^2$ であり, 三角形の面積は $\frac{bc}{2}$ である。

偶数の 2 乗は 4 で割り切れ, 奇数の 2 乗は 4 で割ると 1 余る。したがって整数の 2 乗を 4 で割った余りは 0 か 1 である。b, c ともに奇数であれば, $a^2 = b^2 + c^2$ は 4 で割ると 2 余ることになり不合理. よって b, c の少なくとも一方は偶数。よって bc は偶数。

3 の倍数でない整数は $3l \pm 1$ と書ける。$(3l \pm 1)^2 = 9l^2 \pm 6l + 1$ だから, 3 で割り切れない数の 2 乗は 3 で割ると 1 余る。 また明らかに 3 の倍数の 2 乗は 3 で割り切れる。したがって整数の 2 乗を 3 で割った余りは 0 か 1 である。b, c どちらも 3 で割れなければ, $a^2 = b^2 + c^2$ は 3 で割ると 2 余ることになり不合理. よって b, c の少なくとも一方は 3 の倍数。よって bc は 3 の倍数。

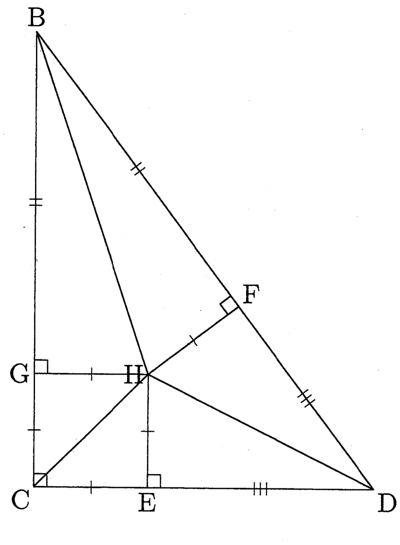
以上から bc は 6 の倍数。よって $\frac{bc}{2}$ は整数であり, 3 の倍数。

3 四面体 ABCD において, 三角形 BCD の 3 辺の長さは 3, 4, 5 である。また, A から対面 BCD に下ろした垂線の足 H は三角形 BCD の内心に一致している。AH の長さを h とする。 この四面体を AH を軸として一回転したとき, この四面体の表面が通過した部分の体積を求めよ。(50 点)

解答例

[これと解法が違っていても, 同じ結論が正しい論理によって導かれていれば正解です。]

$\mathrm{CD} = 3$, $\mathrm{DB} = 5$, $\mathrm{BC} = 4$ として一般性を失わない。 H から各辺に下ろした垂線の足を E, F, G とする。 $\mathrm{BF} = \mathrm{BG} = b$, $\mathrm{CE} = \mathrm{CG} = c$, $\mathrm{DE} = \mathrm{DF} = d$ とおくと, 簡単な計算で, $b = 3$, $c = 1$, $d = 2$ であることがわかる。



$\mathrm{HE} = \mathrm{HF} = \mathrm{HG} = c = 1$ に注意すると $\mathrm{HB}^2 = 10$, $\mathrm{HC}^2 = 2$, $\mathrm{HD}^2 = 5$ だから $\mathrm{HC} < \mathrm{HD} < \mathrm{HB}$ である。よって, 三角形の周上で H から最も離れている点は B, 最も近いのは, E, F, G である。したがって, 求める体積は, 三角形 AHB を一回転してえられる円錐から三角形 AHE を一回転してえられる円錐を除いた部分の体積。したがって,

$$\frac{\pi \mathrm{HB}^2 h}{3} - \frac{\pi \mathrm{HE}^2 h}{3} = \frac{10\pi h}{3} - \frac{\pi h}{3} = 3\pi h$$

である。

$\boxed{4}$ 次のゲームを考える。

- 最初の持ち点は 1 である。
- コインを投げて, 表が出れば持ち点を倍に, 裏が出れば持ち点を半分にする。ただし, 持ち点が 1 のときに裏が出たら持ち点は 0 になるものとする。

コインを n 回投げたときの持ち点が 1 である確率を $p(n)$, コインを n 回投げたときの持ち点の期待値を $\mathrm{E}(n)$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。(50 点)

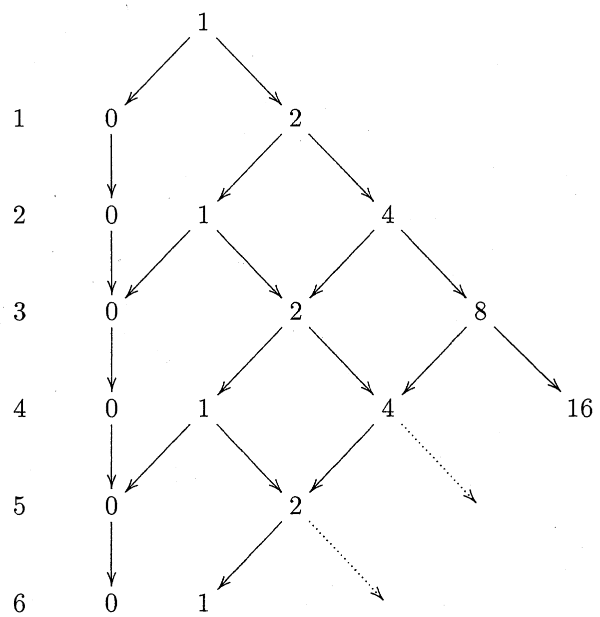
問 1 $p(4)$ を求めよ。

問 2 $\mathrm{E}(n+1)=\dfrac{5}{4}\mathrm{E}(n)-\dfrac{1}{4}p(n)$ であることを示せ。

問 3 $\mathrm{E}(7)$ を求めよ。

解答例

[これと解法が違っていても, 同じ結論が正しい論理によって導かれていれば正解です。]



問 1 持ち点が 1 になるのは, 表と裏が同数出て, かつ途中で 0 にならない（つまり常に表の出た回数が裏が出た回数以上である）場合。よって, 4 回投げたあと 1 であるのは,「表表裏裏」と「表裏表裏」の 2 通り。したがって, 求める確率は $\frac{1}{8}$ である。

問 2 n 回投げたときの持ち点が 2^j である確率を $p_j(n)$ とすると $j\neq -1$ のとき

$$p_j(n+1)=\frac{1}{2}\left\{p_{j+1}(n)+p_{j-1}(n)\right\}$$

である。 $j<0$ または $j>n$ のときは $p_j(n)=0$ であることに注意して,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(n+1) &= \sum_{j=0}^{n+1} 2^j p_j(n+1) \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} 2^{j-1}\{p_{j+1}(n)+p_{j-1}(n)\} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n+1} 2^{j+1} p_{j+1}(n) + \sum_{j=0}^{n+1} 2^{j-1} p_{j-1}(n) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n+2} 2^{j} p_{j}(n) + \sum_{j=-1}^{n} 2^{j} p_{j}(n) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} 2^{j} p_{j}(n) + \sum_{j=0}^{n} 2^{j} p_{j}(n) \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{E}(n) - \frac{1}{4}p_0(n) + \mathrm{E}(n) = \frac{5}{4}\mathrm{E}(n) - \frac{1}{4}p(n)
\end{aligned}
$$

となる。

問 3 n が奇数のときは $p(n)=0$ である。$p(2)=\frac{1}{4}$, $p(4)=\frac{1}{8}$ である。 問 1 と同様に考えて, 6 回投げたあと 1 となるのは, 「表表表裏裏裏」, 「表表裏表裏裏」, 「表表裏裏表裏」, 「表裏表表裏裏」, 「表裏表裏表裏」の 5 通りだから $p(6)=\frac{5}{2^6}$ である。 $\mathrm{E}(1)=1$ だから, 問 2 を使って計算すれば, $\mathrm{E}(7)=\frac{115}{32}$ である。