平成25年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$ および $\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 t を $0 \leqq t < 2$ をみたす定数とする。放物線 $y=(x-2)^2$ 上の点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線を ℓ とする。このとき，次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　接線 ℓ の方程式を求めよ。

問 2　直線 ℓ と x 軸の交点を求めよ。

問 3　直線 ℓ と x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする。$0 \leqq t < 2$ において $S(t)$ が最大となるときの t の値と $S(t)$ の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 $\triangle$ABCの3辺の長さが$AB=6$，$BC=5$，$CA=4$であるとき，次の問いに答えよ。(50点)

問 1　$\cos\angle BAC$を求めよ。

問 2　$\angle BAC$の二等分線と辺BCの交点をLとする。線分ALの長さを求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
合計	

受　験　番　号

乙 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $y' = 2x - 4$ より接線 ℓ の方程式は $y = 2(t-2)(x-t) + (t-2)^2$.

問 2 $2(t-2)(x-t) + (t-2)^2 = 0$ とすると,

$$x = t - \frac{(t-2)^2}{2(t-2)} = t - \frac{t-2}{2} = \frac{t+2}{2}$$

よって，交点は $\left(\frac{t+2}{2}, 0\right)$.

問 3 $0 \leqq t < 2$ のとき，直線 ℓ と y 軸の交点は $(0, 4-t^2)$, 直線 ℓ と x 軸の交点は $\left(\frac{t+2}{2}, 0\right)$.
よって，$S(t)$ は上記の点と原点 $(0,0)$ がなす直角三角形の面積であるから,

$$S(t) = \frac{1}{2}(4-t^2)\frac{t+2}{2} = \frac{1}{4}(-t^3 - 2t^2 + 4t + 8)$$

ここで,

$$S'(t) = \frac{1}{4}(-3t^2 - 4t + 4) = -\frac{1}{4}(3t-2)(t+2)$$

より，$S'(t) = 0$ を $0 \leqq t < 2$ の範囲で解いて $t = \frac{2}{3}$. これより増減表は

t	0	……	$\frac{2}{3}$	……	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	2	↗	最大	↘	

よって，$S(t)$ は $t = \frac{2}{3}$ のとき最大値 $S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{64}{27}$ をとる。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 余弦定理より $\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 4} = \dfrac{9}{16}$.

問 2 $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とする。$\mathrm{BL} : \mathrm{LC} = 3 : 2$ より $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \dfrac{2}{5}\vec{b} + \dfrac{3}{5}\vec{c}$.

問 1 より，$\vec{b}\cdot\vec{c} = 6\cdot 4\cdot\dfrac{9}{16} = \dfrac{27}{2}$ なので,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AL}}\right|^2 = \frac{4}{25}\left|\vec{b}\right|^2 + 2\cdot\frac{6}{25}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{9}{25}\left|\vec{c}\right|^2 = 18$$

よって，$\mathrm{AL} = 3\sqrt{2}$.