平成25年度入学試験問題（前期日程）

# 数　学　甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

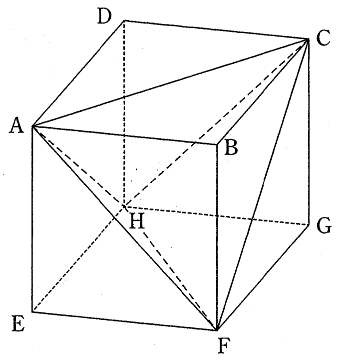
| 受験番号 |
| --- |
| |

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1　次の問いに答えよ。(50点)

問 1　直径1の球を球の中心から距離 $a$ の平面で切って二つの部分に分けたとき，中心を含まない部分の体積を求めよ。ただし，$0 < a < \frac{1}{2}$ とする。

問 2　一辺の長さが1である立方体ABCD−EFGHを考える。この立方体に内接する球と正四面体ACFHとの共通部分の体積を求めよ。




(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 小計 | |

**1** 解答欄

問 1

問 2

$\boxed{2}$ $xy$ 平面上の曲線 $C$ は媒介変数 $\theta$ を用いて

$$x=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\theta+\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と表される。このとき，次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　曲線 $C$ を表す $x$ と $y$ の関係式を求め，$xy$ 平面に図示せよ。

問 2　点$(2,\ 0)$から曲線 $C$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 小計 | |

2 解答欄

問 1

問 2

**3** $a$を自然数とする。赤球3個，白球$a$個が入った袋から一つずつ順に取り出す操作をすべての球を取り出すまで繰り返す。ただし，取り出した球は元に戻さない。このとき，2個目の赤球が出る前までに取り出した球の数を$X$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　$a=4$とする。3番目までに赤球が1個だけ出て，4番目が赤球である確率を求めよ。

問2　$X=n$となる確率を$p_n$とする。$p_n$が最大となる$n$の値を$a$を用いて表せ。

問3　$X$の期待値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採点欄 | |
|---|---|
| 問1 | |
| 問2 | |
| 問3 | |
| 小計 | |

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

**4** $m$を正の定数とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1 $xy$平面上に2点O(0，0)，P(1，$m$)がある。このとき2点Q，Rの座標を，△OPQ，△OPRがともに正三角形となるように定めよ。ただし，点Qは$xy$平面上の$y > mx$となる領域に，点Rは$xy$平面上の$y < mx$となる領域に定めよ。

問 2 問1で定めた3点P，Q，Rについて，一次変換$f$は点Pを同じ点Pに，点Qを点Rに移すものとする。この一次変換$f$を表す行列$A$を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採点欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 小計 | |

**4** 解答欄

問 1

問 2

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 数　　学 甲 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 合計 | |

| 受　験　番　号 |
|---|
| |

甲　解答例

$\boxed{1}$　[これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　求める体積は

$$\pi\int_a^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{4}-x^2\right\}dx=\pi\left[\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}x^3\right]_a^{\frac{1}{2}}$$
$$=\pi\left\{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}-\frac{a}{4}+\frac{a^3}{3}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{12}\left(4a^3-3a+1\right)$$

問 2　立方体 ABCD–EFGH を座標空間において

$$\mathrm{E}(0,0,0),\ \mathrm{F}(1,0,0),\ \mathrm{H}(0,1,0),\ \mathrm{A}(0,0,1)$$

と配置する。このとき，内接する球の中心 I の座標は $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$．また，$\mathrm{IA}=\mathrm{IF}=\mathrm{IH}$ であるから点 I から正三角形 AFH に下ろした垂線の足はその重心 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ と一致する。従って，点 I から 3 点 A, F, H の定める平面 $\alpha$ までの距離 $a$ は

$$a=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって，問 1 より内接する球の平面 $\alpha$ によって切り取られる部分の体積は

$$\frac{\pi}{12}\left(4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{6^3}-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+1\right)=\frac{\pi}{9\cdot 12}\left(9-4\sqrt{3}\right)$$

ここで，内接する球の直径は 1 であり，正四面体 ACFH からはみだしている部分の体積は, 3 点 A, F, H の定める平面 $\alpha$ より外側の部分の体積の 4 倍であるから，以上より，求める体積は

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\cdot\frac{\pi}{9\cdot 12}\left(9-4\sqrt{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}-9}{54}\pi$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

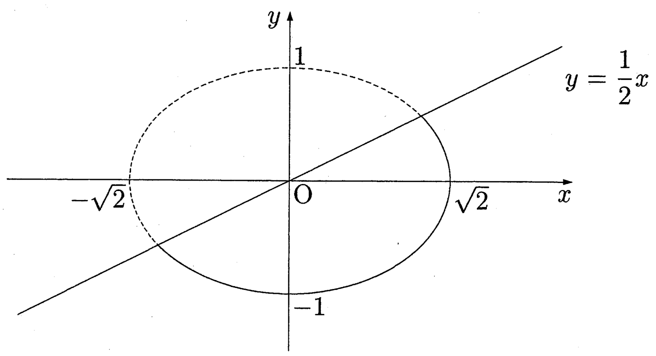
問 1 $x=\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\theta+\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta,\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta$ を $\sin\theta, \cos\theta$ について解いて,

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y), \qquad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して整理すると

$$\frac{1}{2}x^2+y^2=1$$

$\theta$ は $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くので, $\sin\theta\geqq 0$. よって, $\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y\geqq 0$. これより $y\leqq\frac{1}{2}x$.
また, このとき, この点 $(x,y)$ は曲線 $C$ 上にある。
以上より, 曲線 $C$ は楕円 $\frac{1}{2}x^2+y^2=1$ の $y\leqq\frac{1}{2}x$ の部分で, これを図示すると, 以下の図の楕円の実線の部分となる。ただし, 両端の点を含む。




問 2 直線 $x=2$ は $C$ に接しないので, $(2,0)$ を通り曲線 $C$ と接する直線は $y=m(x-2)$ とおける。これを $x^2+2y^2=2$ に代入すると, $x^2+2m^2(x-2)^2=2$. 整理すると,

$$(2m^2+1)x^2-8m^2x+8m^2-2=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

この 2 次方程式の判別式を $D$ とすると,

$$\frac{D}{4}=16m^4-(2m^2+1)(8m^2-2)=-4m^2+2$$

よって, 接するための必要十分条件は $D=0$ だから, $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$m=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, ①に代入して解くと $x=1$ なので, 接点は $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

このとき, $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\frac{1}{2}\cdot 1$ なので, これは確かに $C$ 上の点である。

$m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 同様に接点を求めると $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

このとき $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}\cdot 1$ なので, これは確かに $C$ 上にない。

以上より, 求める接線は $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$, 接点は $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**3** [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 赤球，白球がすべて区別できると考える。

問 2 を考慮し，$n$ 番目までに赤球が 1 個だけ出て，$n+1$ 番目が赤球である確率を求める。

赤球は $n$ 番目以前に 1 個，$n+1$ 番目に 1 個，$n+2$ 番目以降に 1 個で，$n$ 番目以前には $n$ 通り，$n+2$ 番目以降には $a+3-(n+1)=a+2-n$ 通りあるから，その総数は

$$3!\cdot n\cdot(a+2-n)=6n(a+2-n) \text{ 通り。}$$

白球は残りの順番に出るので，その総数は $a!$ 通り。

一方，赤球，白球の出る順番の総数は $(a+3)!$ 通り。

以上より，求める確率は

$$\frac{6n(a+2-n)\cdot a!}{(a+3)!}=\frac{6n(a+2-n)}{(a+3)(a+2)(a+1)}$$

ここで，$a=4, n=3$ を代入して $\dfrac{9}{35}$ となる。

[別解] 赤球，白球はすべて色以外に区別がつかないと考える。

赤球は $n$ 番目以前に 1 個，$n+1$ 番目に 1 個，$n+2$ 番目以降に 1 個で，$n$ 番目以前には $n$ 通り，$n+2$ 番目以降には $a+3-(n+1)=a+2-n$ 通りあるから，その総数は $n(a+2-n)$ 通り。一方，赤球，白球の出る順番の総数は $\dfrac{(a+3)!}{a!\cdot 3!}=\dfrac{(a+3)(a+2)(a+1)}{6}$ 通り。

以上より，求める確率は $\dfrac{6n(a+2-n)}{(a+3)(a+2)(a+1)}$.

ここで，$a=4, n=3$ を代入して $\dfrac{9}{35}$ となる。

問 2 $X=n$ となるのは，$n$ 番目までに赤球が 1 個だけ出て，$n+1$ 番目が赤球であるときなので，問 1 より $p_n=\dfrac{6n(a+2-n)}{(a+3)(a+2)(a+1)}$. ここで，

$$n(a+2-n)=-\left(n-\frac{a+2}{2}\right)^2+\frac{(a+2)^2}{4}$$

となるから，$n$ が自然数であることに注意して，

$a$ が偶数のとき　$n=\dfrac{a+2}{2}$ のとき $p_n$ は最大となり，

$a$ が奇数のとき　$n=\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{a+3}{2}$ のとき $p_n$ は最大となる。

問 3 $X$ の期待値を $m$ とすると，問 2 より

$$\begin{aligned} m &= \sum_{n=1}^{a+1} np_n=\frac{6}{(a+3)(a+2)(a+1)}\left\{(a+2)\sum_{n=1}^{a+1}n^2-\sum_{n=1}^{a+1}n^3\right\} \\ &= \frac{6}{(a+3)(a+2)(a+1)}\left\{(a+2)\cdot\frac{(a+1)(a+2)(2a+3)}{6}-\frac{(a+1)^2(a+2)^2}{4}\right\} \\ &= \frac{a+2}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 点 Q は原点 O を中心に点 P を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ，点 R は $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点なので，

$$\mathrm{Q}: \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{R}: \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\frac{1-\sqrt{3}m}{2}, \frac{\sqrt{3}+m}{2}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{1+\sqrt{3}m}{2}, \frac{-\sqrt{3}+m}{2}\right)$.

問 2 仮定より $A\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix}$ であるから，

$$A\begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}m}{2} \\ m & \frac{\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}m}{2} \\ m & \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix}$$

故に

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}m}{2} \\ m & \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}m}{2} \\ m & \frac{\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}(1+m^2)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{3}m}{2} \\ m & \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+m}{2} & -\frac{1-\sqrt{3}m}{2} \\ -m & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}(1+m^2)} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}(1-m^2)}{2} & \sqrt{3}m \\ \sqrt{3}m & \frac{\sqrt{3}(m^2-1)}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$