平成24年度入学試験問題（後期日程）

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問に答えよ。　(50 点)

問 1　関数 $y=\dfrac{\log x}{x}$ の増減，凹凸および変曲点を調べてグラフを書け。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ は用いてよい。

問 2　曲線 $y=\dfrac{\log x}{x}$ と直線 $x=e^2$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 2次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，$\varDelta(A)=ad-bc$とおく。次の問に答えよ。　(50点)

問 1　2次の正方行列Aが逆行列A^{-1}をもつとき，$\varDelta(A^{-1})=\dfrac{1}{\varDelta(A)}$となることを示せ。

問 2　2次の正方行列Aが逆行列A^{-1}をもち，AおよびA^{-1}の成分がすべて整数であるとき，$\varDelta(A)$のとりうる値を求めよ。

問 3　2次の正方行列Aが逆行列A^{-1}をもち，AおよびA^{-1}の成分がすべて0以上の整数であるとき，Aを求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 次の問に答えよ。　(50 点)

問 1　関数 $y = x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})\ (x > 1)$ を微分せよ。

問 2　曲線 $y = \sqrt{x^2-1}$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (a > 1)$ をとる。このとき，$f(x) = \dfrac{b}{a}x - \sqrt{x^2-1}$ は $1 \leqq x \leqq a$ において $f(x) \geqq 0$ となることを示せ。

問 3　曲線 $y = \sqrt{x^2-1}$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (a > 1)$ をとる。原点 O と点 P を結ぶ線分 OP と x 軸および曲線 $y = \sqrt{x^2-1}$ で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，a を S で表せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

3 **解答欄**

問 1

問 2

問 3

4 $a_n=(\sqrt{2}+1)^n$, $b_n=(\sqrt{2}-1)^n$ ($n=1$, 2, 3, ……)とするとき，次の問に答えよ。　(50 点)

問 1　a_n を整数 p_n と整数 q_n を用いて $a_n=p_n+q_n\sqrt{2}$ と表したとき，$p_n^2-2q_n^2=(-1)^n$ が成立することを示せ。

問 2　b_n を p_n と q_n を用いて表せ。

問 3　実数 a に対して，$[a]$ を a を越えない最大の整数とする。例えば，$[2]=2$，$[3.9]=3$ である。n が奇数なら $[a_n]$ は偶数，n が偶数なら $[a_n]$ は奇数となることを示せ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

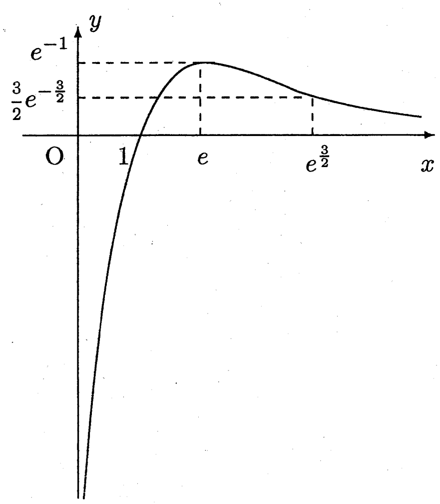
問 1

$$y' = \frac{1-\log x}{x^2}, \quad y'' = \frac{(1-\log x)'x^2 - 2x(1-\log x)}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

なので増減表を書くと次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		↗	最大値	↘	変曲点	↘

グラフの概形は右のようになる。



問 2 求める面積は,

$$\int_1^{e^2} \frac{\log x}{x}dx = \int_1^{e^2} (\log x)' \log x \, dx = \frac{1}{2}\left[(\log x)^2\right]_1^{e^2} = 2$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, A の逆行列 A^{-1} が存在するから $ad-bc\neq 0$ で

$A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となる。よって,

$$\Delta(A^{-1})=\frac{da-bc}{(ad-bc)^2}=\frac{1}{ad-bc}=\frac{1}{\Delta(A)}$$

問 2　A の成分がすべて整数だから, $\Delta(A)$ も整数である。また, A^{-1} の成分もすべて整数だから, 問 1 より $\dfrac{1}{\Delta(A)}$ も整数である。整数の逆数がまた整数になるものは ±1 に限るので, $\Delta(A)=\pm1$

問 3　問 2 より $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると, $ad-bc=\pm1$ である。

$ad-bc=1$ のとき:
$A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ となる。A と A^{-1} の成分がすべて 0 以上だから　$b\geqq 0,\ -b\geqq 0$ より $b=0$ となる。同様に, $c=0$ となる。このとき $ad=1$ となるが, $a,\ d$ は 0 以上の整数なので, $a=d=1$ となり, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$ad-bc=-1$ のとき:
$A^{-1}=\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ となる。$ad-bc=1$ のときと同様に考えて, $a=d=0,\ b=c=1$ となり, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

従って, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ または $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$y' = \sqrt{x^2-1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1}$

問 2

$$f'(x) = \frac{b}{a} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{b\sqrt{x^2-1}-ax}{a\sqrt{x^2-1}}$$

ここで, $x > 1$ に対して, $x > \sqrt{x^2-1}$ なので, 特に $a > b$ となる。従って,

$$b\sqrt{x^2-1} - ax < (b-a)x < 0$$

$a\sqrt{x^2-1} > 0$ だから, $f'(x) = \dfrac{b\sqrt{x^2-1}-ax}{a\sqrt{x^2-1}} < 0$ となり, $f(x)$ は減少する。$f(a) = 0$ だから, $1 \leqq x \leqq a$ において $f(x) \geqq 0$ となる。

問 3　問 2 の結果より, 線分 OP と $y = \sqrt{x^2-1}$ との交点は P だけである. 従って S は図の斜線の部分の面積となる。$b = \sqrt{a^2-1}$ と問 1 の結果より,

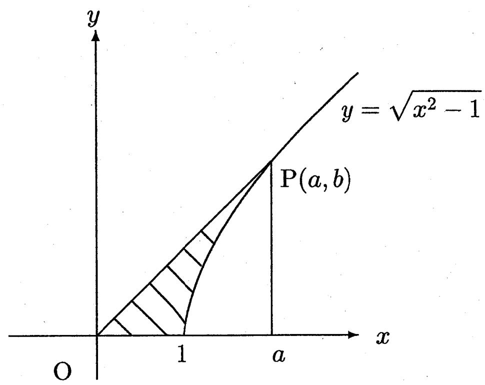
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a\sqrt{a^2-1} - \int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}a\sqrt{a^2-1} - \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_1^a \\ &= \frac{1}{2}\log\left(a+\sqrt{a^2-1}\right) \end{aligned}$$

従って, $a + \sqrt{a^2-1} = e^{2S}$ となる。

$\sqrt{a^2-1} = e^{2S} - a$ の両辺を 2 乗して

a について解くと,

$$a = \frac{e^{2S}+e^{-2S}}{2}$$



$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　n に関する帰納法で示す。$n=1$ のときは, $p_1=q_1=1$ だから $p_1^2-2q_1^2=-1$ となって成立する。$n=k$ のとき $p_k^2-2q_k^2=(-1)^k$ であると仮定する。

$$a_{k+1}=a_k(\sqrt{2}+1)=(p_k+q_k\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)=(p_k+2q_k)+(p_k+q_k)\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ は無理数だから, $p_{k+1}=p_k+2q_k$, $q_{k+1}=p_k+q_k$ となる。このとき,

$$p_{k+1}^2-2q_{k+1}^2=(p_k+2q_k)^2-2(p_k+q_k)^2=-p_k^2+2q_k^2=-(p_k^2-2q_k^2)=(-1)^{k+1}$$

となり, $n=k+1$ のときも成立する。

問 2　$a_n\cdot b_n=\{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\}^n=1$ だから, 問 1 より

$$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{p_n+q_n\sqrt{2}}=\frac{p_n-q_n\sqrt{2}}{p_n^2-2q_n^2}=(-1)^np_n+(-1)^{n+1}q_n\sqrt{2}$$

問 3　$0<b_1<1$ より, $0<b_n<1$ である。問 2 の結果を用いる。

$n=2k$ (n が偶数) のとき:

$$a_{2k}+b_{2k}=p_{2k}+q_{2k}\sqrt{2}+p_{2k}-q_{2k}\sqrt{2}=2p_{2k}$$

より, $a_{2k}=2p_{2k}-b_{2k}$ となる。$2p_{2k}$ は整数で $0<b_{2k}<1$ だから, $[a_{2k}]=2p_{2k}-1$ となり, これは奇数である。

$n=2k+1$ (n が奇数) のとき:

$$a_{2k+1}-b_{2k+1}=p_{2k+1}+q_{2k+1}\sqrt{2}+p_{2k+1}-q_{2k+1}\sqrt{2}=2p_{2k+1}$$

より, $a_{2k+1}=2p_{2k+1}+b_{2k+1}$ となる。$2p_{2k+1}$ は整数で $0<b_{2k+1}<1$ だから, $[a_{2k+1}]=2p_{2k+1}$ となり, これは偶数である。