平 成 2 4 年 度 入 学 試 験 問 題 (前期日程)

数　学　甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ $(x \geqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a>1)$ での接線と y 軸との交点を Q とする。次の問に答えよ。(50 点)

問 1　点 Q の座標を b で表せ。

問 2　PQ^2 の最小値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

◇M2(536—19)

1 解答欄

問 1

問 2

2 Nを2以上の自然数とする。1からNまでの番号を1つずつ書いたN枚のカードから2枚を同時に取り出し，そのうち大きい番号をXとし，小さい番号をYとする。次の問に答えよ。(50点)

問 1　iを1以上N以下の自然数とするとき，$X=i$となる確率p_iおよび$Y=i$となる確率q_iを求めよ。

問 2　Xの期待値E_1およびYの期待値E_2を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

3 数列$\{c_n\}$を次のように定義する。

$$c_1 = 1,\ c_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3}\left(c_n + \frac{1}{4^{n+1}}\right)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問に答えよ。(50 点)

問 1　$n \geqq 2$のとき，$a_n = 1 + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4^n}$とする。このとき，$c_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{3^{n-i}}$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

問 2　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} c_n$を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

4 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \theta d\theta$ ($n = 1$, 2, 3, $\cdots$)とするとき，次の問に答えよ。(50 点)

問 1 I_1 および $I_n + I_{n+2}$ ($n = 1$, 2, 3, $\cdots$)を求めよ。

問 2 不等式 $I_n \geqq I_{n+1}$ ($n = 1$, 2, 3, $\cdots$)を示せ。

問 3 $\lim_{n \to \infty} nI_n$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学甲	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

甲　解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ だから，P$(a,\ b)$ での接線の方程式は

$$y = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(x-a) + \sqrt{a^2-1}$$

であり，$x=0$ とすると，$y = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}} = -\dfrac{1}{b}$，よって点 Q の座標は $(0,\ -\dfrac{1}{b})$ である。

問 2 三平方の定理より

$$\mathrm{PQ}^2 = a^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 = b^2+1+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 = 2b^2+3+\frac{1}{b^2}$$

$f(b) = \mathrm{PQ}^2$ とおくと，

$$f'(b) = 4b - \frac{2}{b^3} = \frac{2(\sqrt{2}b^2+1)(\sqrt{2}b^2-1)}{b^3}$$

$b>0$ だから $f'(b)=0$ の解は $b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ である。また，$0<b<\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ のとき $f'(b)<0$，$b>\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ のとき $f'(b)>0$，よって $f(b)$ は $b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ で最小値をとり，最小値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}+3+\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

をとる。

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　N 枚のカードから 2 枚を取り出す取り出し方は全部で ${}_N\mathrm{C}_2$ 通りである。そのうち，大きい番号が i となる取り出し方は $(i-1)$ 通りであり，小さい番号が i となる取り出し方は $(N-i)$ 通りである。従って，

$$p_i = \frac{i-1}{{}_N\mathrm{C}_2} = \frac{2(i-1)}{N(N-1)},\quad q_i = \frac{N-i}{{}_N\mathrm{C}_2} = \frac{2(N-i)}{N(N-1)}$$

問 2

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=1}^{N} ip_i = \sum_{i=1}^{N} i\frac{2(i-1)}{N(N-1)} = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} i(i-1) = \frac{2}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} i^2 - \sum_{i=1}^{N} i\right) \\ &= \frac{2}{N(N-1)}\left\{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N(N+1)}{2}\right\} = \frac{2(N+1)}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{i=1}^{N} iq_i = \sum_{i=1}^{N} i\frac{2(N-i)}{N(N-1)} = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} i(N-i) = \frac{2}{N(N-1)}\left(N\sum_{i=1}^{N} i - \sum_{i=1}^{N} i^2\right) \\ &= \frac{2}{N(N-1)}\left\{N\frac{N(N+1)}{2} - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right\} = \frac{N+1}{3} \end{aligned}$$

3 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 帰納法で示す。$n=2$ のとき,

$$c_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4^2}\right) = \frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^2}\right) = \frac{1}{3} + a_2$$

与式が成り立つ。k を自然数とし, $n=k$ のとき与式が成り立つと仮定する。すなわち

$$c_k = \frac{1}{3^{k-1}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i}{3^{k-i}}$$

$n=k+1$ のとき, 与式が成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{1}{3}c_k + a_{k+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{k-1}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i}{3^{k-i}}\right) + a_{k+1} \\ &= \frac{1}{3^k} + \sum_{i=2}^{k}\frac{a_i}{3^{k+1-i}} + a_{k+1} = \frac{1}{3^k} + \sum_{i=2}^{k+1}\frac{a_i}{3^{k+1-i}} \end{aligned}$$

よって $n=k+1$ のときにも与式が成り立つ。

問 2

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n-1}} + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{3^{n-i}}\left(1 + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^i}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{3^{n-i}} + \frac{1}{3^n}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^i + \frac{1}{3^{n+1}}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^i\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\frac{(\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^{n+1}}{1-\frac{3}{2}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{(\frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{2} + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{n-2}} + \frac{3}{2^n}\right) + 0 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{(\cos\theta)'}{\cos\theta}d\theta=\Big[-\log|\cos\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\log 2$$

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta(1+\tan^2\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta(\tan\theta)'d\theta=\frac{1}{n+1}\Big[\tan^{n+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$$

問 2 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$0\leqq\tan\theta\leqq 1$ だから，$0\leqq\tan^{n+1}\theta\leqq\tan^n\theta$ となる。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}\theta d\theta\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta d\theta,\ \text{すなわち}\ I_{n+1}\leqq I_n$$

問 3 問 1 および問 2 の結果により

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1},\ I_n\geqq I_{n+1}\geqq I_{n+2}$$

これより

$2I_n\geqq\frac{1}{n+1}$

$2I_{n+2}\leqq\frac{1}{n+1}$，すなわち $2I_n\leqq\frac{1}{n-1}$

従って

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{2(n-1)},\ \text{よって，}\ \frac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\frac{n}{2(n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$$

ゆえに，$\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$