平成２４年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$ および $\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問に答えよ。　(50 点)

問 1　次の数列の一般項を求めよ。

$1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ 41,\ \cdots\cdots$

問 2　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ で, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$ であるとき, $|\vec{a}-3\vec{b}|$ を求めよ。

問 3　次の数を小さい順に並べよ。

$\log_3 5,\ \dfrac{1}{2}+\log_9 8,\ \log_9 26$

問 4　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^3 |x^2-x-2|\,dx$$

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
問 4	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

2 次の問に答えよ。　(50 点)

問 1　加法定理を用いて，$\cos 2x$ および $\cos 3x$ を $\cos x$ で表せ。

問 2　$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $f(x) = \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x$ の最大値および最小値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 **解答欄**

問 1

問 2

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
合計	

受験番号

乙 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　求める数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}(b_n = a_{n+1} - a_n)$ とおく。

$\{b_n\}$ は，4，6，8，10，12，$\cdots$ だから，初項4，公差2の等差数列である。ゆえに，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{1}{2}(n-1)\{2 \cdot 4 + (n-2)2\} = n^2 + n - 1$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ。

問 2　$|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b}$

$$= |\vec{a}|^2 - 6|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + 9|\vec{b}|^2 = 3^2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 2^2 = 27$$

よって，$|\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

問 3　対数の底を9にそろえると

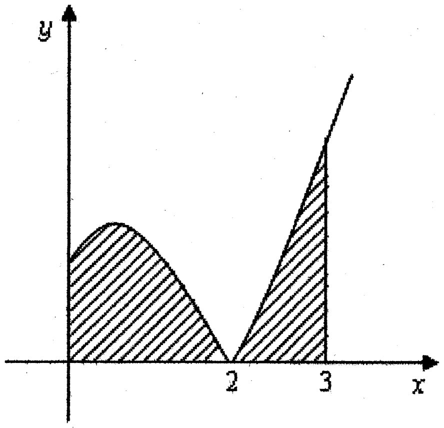
$$\log_3 5 = \frac{\log_9 5}{\log_9 3} = \frac{\log_9 5}{\frac{1}{2}} = 2\log_9 5 = \log_9 5^2 = \log_9 25$$

$$\frac{1}{2} + \log_9 8 = \log_9 3 + \log_9 8 = \log_9(3 \cdot 8) = \log_9 24$$

真数を比較して小さい順に並べると

$$\frac{1}{2} + \log_9 8 < \log_3 5 < \log_9 26$$

問 4　$x^2 - x - 2 = 0$ の解 $x = -1, 2$ より，放物線 $y = x^2 - x - 2$ は $x = -1, 2$ で x 軸と交わる。



よって求める定積分は，図の斜線部の面積である。

$$\int_0^3 |x^2 - x - 2|dx$$

$$= \int_0^2 (-x^2 + x + 2)dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^3$$

$$= \frac{31}{6}$$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \cdot \sin x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x\end{aligned}$$

問 2 $\cos x = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ である。問 1 より

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4t^3 - 3t,\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$ であるから

$$f(x) = \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x = 4t^3 + 2t^2 - 5t - 1$$

$g(t) = 4t^3 + 2t^2 - 5t - 1$ とおくと，$g'(t) = 12t^2 + 4t - 5$ だから，$g'(t) = 0$ の解は $-\frac{5}{6}$，$\frac{1}{2}$ である。これらのことより，$g(t)$ の $-1 \leqq t \leqq 1$ における増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{5}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{121}{54}$	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	0

よって最大値は $\cos x = -\frac{5}{6}$ のとき $\frac{121}{54}$，最小値は $\cos x = \frac{1}{2}$ のとき $-\frac{5}{2}$ となる。