平 成 2 3 年 度 入 学 試 験 問 題 (後期日程)

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1　2つの放物線 $C_1 : y = x^2 - (a+1)x + a$，$C_2 : y = x^2 - (a-1)x - a$ がある。ただし，$-1 < a < 1$ とする。次の問いに答えよ。　(50点)

問 1　C_1 と C_2 の両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。

問 2　C_1 と C_2 および ℓ によって囲まれた図形の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nは次の条件を満たすとする。

$$S_1 = 1,\ S_{n+1} - 3S_n = 2^{n+1} - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。　(50点)

問 1　数列$\{a_n\}$の満たす漸化式を求めよ。

問 2　$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$とおくとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

問 3　a_{100}を4で割ったときの余りを求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 次の問いに答えよ。　(50 点)

問 1　$50!$ を素因数分解したとき，累乗 2^a の指数 a を求めよ。

問 2　${}_{100}\mathrm{C}_{50}$ を素因数分解したとき，累乗 3^b の指数 b を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

3 **解答欄**

問 1

問 2

4 平面上で，不等式 $(x-2)^2 \geqq y^2$ の表す領域を A，連立不等式 $\begin{cases} (x-2)^2 \geqq y^2 \\ y \geqq x^2 - 2x \end{cases}$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。 (50 点)

問 1 領域 A を図示せよ。

問 2 領域 B の面積を求めよ。

問 3 領域 B を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学	
1	
2	
3	
4	
合計	

受 験 番 号

後期 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 ℓ と C_1 の接点を $(p, p^2-(a+1)p+a)$ とする。この点における接線の方程式は

$$y=(2p-a-1)(x-p)+p^2-(a+1)p+a$$
$$\therefore\quad y=(2p-a-1)x-p^2+a$$

これが C_2 と接するので

$$x^2-2(p-1)x+p^2-2a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が重解をもつ。

$$\begin{aligned} D/4 &= (p-1)^2-p^2+2a \\ &= -2p+2a+1 \end{aligned}$$
$$\therefore\quad p=\frac{2a+1}{2}$$

よって，ℓ の方程式は $y=ax-\dfrac{4a^2+1}{4}$

問 2 ℓ と C_2 の接点の x 座標を q とする。q は ①の重解なので,

$$q=p-1=\frac{2a-1}{2}$$

また，C_1 と C_2 の交点の x 座標は,

$$x^2-(a+1)x+a=x^2-(a-1)x-a$$

の解で，a である。

したがって，求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_q^a (x-q)^2\,dx+\int_a^p (x-p)^2\,dx \\ &=\frac{1}{3}(a-q)^3-\frac{1}{3}(a-p)^3 \\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \\ &=\frac{1}{12} \end{aligned}$$

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\begin{cases} S_{n+1} - 3S_n = 2^{n+1} - 1 \cdots\cdots ① \\ S_n - 3S_{n-1} = 2^n - 1 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

①$-$②より

$$a_{n+1} - 3a_n = 2^n$$

すなわち

$$a_{n+1} = 3a_n + 2^n \quad (n \geqq 2) \cdots\cdots ③$$

① で $n = 1$ として $a_1 = 1$ を使うと $a_2 = 5$

よって，③は $n = 1$ でも成り立つ。

問 2 ③の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2} \cdots\cdots ④$$

④の漸化式は，$c = \frac{3}{2}c + \frac{1}{2}$, すなわち $c = -1$ を用いて

$$b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$

と変形される。$b_1 = \frac{1}{2}$ なので

$$b_n + 1 = \frac{3}{2}\,(b_{n-1} + 1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot (b_1 + 1) = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

よって

$$b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

問 3

$$\begin{aligned} a_{100} &= 2^{100}b_{100} = 3^{100} - 2^{100} = 9^{50} - 4 \cdot 2^{98} \\ &= (1 + 4 \cdot 2)^{50} - 4 \cdot 2^{98} \end{aligned}$$

なので，a_{100} を 4 で割ったときの余りは 1

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　1 から 50 までの中で偶数は $2, 4, 6, 8, \cdots, 48, 50$ の 25 個で，このうち

4 の倍数は 12 個，8 の倍数は 6 個，

16 の倍数は 3 個，32 の倍数は 1 個

よって 50! を素因数分解したとき 2 の累乗は

$$32 \cdot 16^{3-1} \cdot 8^{6-3} \cdot 4^{12-6} \cdot 2^{25-12} = 2^{47}$$

となり，$a = 47$ である。

問 2　1 から 100 までの中で 3 の倍数は $3, 6, 9, \cdots, 99$ の 33 個で，このうち

9 の倍数は 11 個，27 の倍数は 3 個，81 の倍数は 1 個

よって 100! を素因数分解したとき 3 の累乗の指数 x は

$$x = 4 + 3(3-1) + 2(11-3) + (33-11) = 48$$

また 1 から 50 までの中で 3 の倍数は $3, 6, 9, \cdots, 48$ の 16 個で，このうち

9 の倍数は 5 個，27 の倍数は 1 個。

よって 50! を素因数分解したとき 3 の累乗の指数 y は

$$y = 3 + 2(5-1) + (16-5) = 22$$

よって

$${}_{100}C_{50} = \frac{100!}{50!50!}$$

を素因数分解したとき，3 の累乗の指数 b は

$$b = x - 2y = 48 - 44 = 4$$

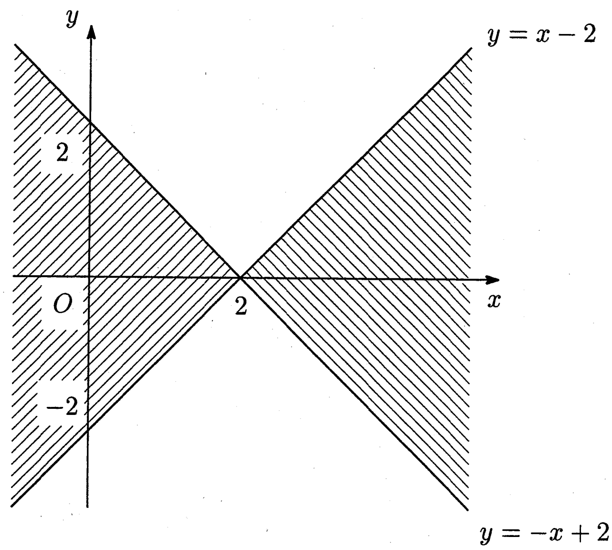
となる。

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $(x-2)^2 \geqq y^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 - y^2 = (x-2+y)(x-2-y) \geqq 0$ なので

$x-2+y \geqq 0,\ x-2-y \geqq 0$, または, $x-2+y \leqq 0,\ x-2-y \leqq 0$。

よって下図。



ただし，境界はすべて含む。

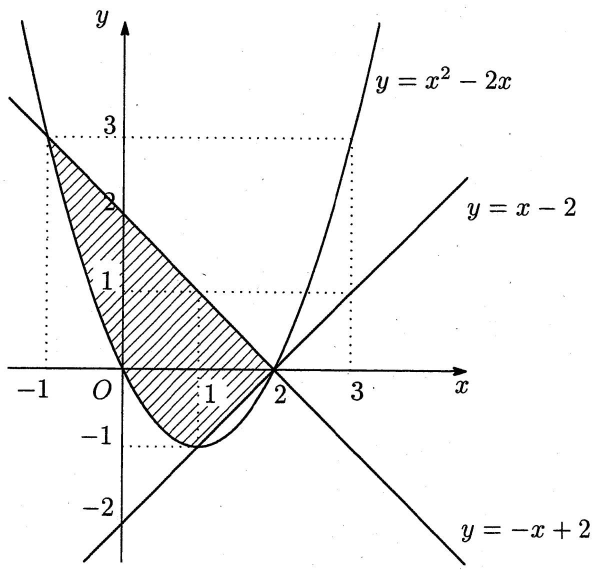
問 2 $y \geqq x^2 - 2x$ は，放物線 $y = x(x-2)$ の上側の部分。領域 B の面積は

$$S = \int_{-1}^{1} \{(2-x) - (x^2-2x)\}dx + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 1 = \int_{-1}^{1}(2+x-x^2)dx + 1$$
$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 1 = 2\cdot 2 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{13}{3}$$

問 3 下のグラフから, 求める立体の体積は $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 - \pi \int_{-1}^{0}(x^2-2x)^2 dx$。ここで

$$\int_{-1}^{0}(x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{5} + 1 + \frac{4}{3} = 2 + \frac{8}{15}$$

よって $V = 9\pi - \left(2 + \frac{8}{15}\right)\pi = \left(7 - \frac{8}{15}\right)\pi = \frac{97}{15}\pi$


y
$y = x^2 - 2x$
$y = x - 2$
$y = -x + 2$
3
2
1
-1
O
1
2
3
x
-1
-2