平 成 2 3 年 度 入 学 試 験 問 題 （前期日程）

# 数　学　甲（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

| 受 験 番 号 |
| --- |
| |

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

**1** 実数 $p$ に対して，行列 $A$，$B$，$C$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに，行列 $A_n$（$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）を

$$A_1 = A,\ A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$A_2$，$A_3$ を求めよ。

問 2　$A_n$（$n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 小計 | |

**1** 解答欄

問 1

問 2

**2** 中心が$(2, 0, 1)$，半径が$2\sqrt{5}$の球面が$yz$平面と交わってできる円を$C$とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　$C$の中心の座標と半径を求めよ。

問 2　点Pは$C$上を動き，点Qは$xy$平面上の直線$x = y$上を動くとする。線分PQの長さの最小値，およびそのときのP，Qの座標を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 小計 | |

## 2 解答欄

問 1

問 2

**3**　1から4までの番号を1つずつ書いた4枚のカードがある。この中から1枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す。これを $n$ 回繰り返したとき，記録された $n$ 個の数の最大公約数を $X$ とする。ただし，$n$ は2以上の自然数とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1　$X=3$ となる確率と $X=4$ となる確率を $n$ を用いて表せ。

問 2　$X=2$ となる確率を $n$ を用いて表せ。

問 3　$X$ の期待値を $n$ を用いて表せ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 問 3 | |
| 小計 | |

# 3 解答欄

問 1

問 2

問 3

**4** 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin 2x \; dx$ を求めよ。

問 2　$m$，$n$ が自然数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ を求めよ。

問 3　$a$，$b$ を実数とする。$a$，$b$ の値を変化させたときの定積分 $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - a \sin x - b \sin 2x)^2 dx$ の最小値，およびそのときの $a$，$b$ の値を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

| 採　点　欄 | |
|---|---|
| 問 1 | |
| 問 2 | |
| 問 3 | |
| 小計 | |

# 4 解答欄

問 1

問 2

問 3

| 採 点 欄 | |
|---|---|
| 数 学甲 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 合計 | |

| 受 験 番 号 |
|---|
| |

甲　解答例

**1**　[これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$
\begin{aligned}
A_2 &= A_1B - BA_1 + C = AB - BA + C \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p+p^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p+p^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A_2B - BA_2 + C \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p+p^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p+p^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (p+p^2)(1+p) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & p+p^2 \\ 1+p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p+p^2+p^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

問 2　問 1 より $A_n = \begin{pmatrix} 0 & p+p^2+\cdots\cdots+p^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と予想される。これを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $A_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ だから $n=1$ のとき成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, $A_k = \begin{pmatrix} 0 & p+p^2+\cdots\cdots+p^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を仮定する。ここで,

$$q_k = p + p^2 + \cdots\cdots + p^k$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_kB - BA_k + C \\
&= \begin{pmatrix} 0 & q_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & q_k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & q_k(1+p) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & q_k \\ 1+p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & pq_k + p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q_{k+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　点 $(2,\ 0,\ 1)$ を $A$ とおき, $A$ から $yz$ 平面に下ろした垂線の足を $B$ とする。$C$ の中心は $B$ であり, $B$ は $A$ と $y,\ z$ 座標が等しいのでその座標は $(0,\ 0,\ 1)$ である。

$C$ の半径を $r$ とおくと, $AB=2$ に注意して

$$r=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$$

よって半径は 4 である。

問 2　$C$ 上の点 $P$ に対し, $\overrightarrow{BP}=(0,\ 4\cos\theta,\ 4\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける。また $Q(t,\ t,\ 0)$ とおける。

$$\begin{aligned}PQ^2&=t^2+(t-4\cos\theta)^2+(4\sin\theta+1)^2\\&=2(t-2\cos\theta)^2+8\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+7\end{aligned}$$

よって $PQ$ の最小値は $\sqrt{7}$ であり, そのときの $P,\ Q$ の座標は

(i) $P(0,\ 2\sqrt{3},\ -1),\ Q(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 0)$, (ii) $P(0,\ -2\sqrt{3},\ -1),\ Q(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0)$

である。

**3** [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　$X = k$ となる確率を $p_k$ とする。最大公約数が 3 になるのは，$n$ 回とも 3 が出るときであるから

$$p_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

また，最大公約数が 4 になるのは，$n$ 回とも 4 が出るときであるから

$$p_4 = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

問 2　最大公約数が 2 になるのは，$n$ 回とも 2 の倍数 $(2, 4)$ が出る場合から，$n$ 回とも 4 が出る場合を除いたときである。

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

問 3　余事象を考えることにより

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - (p_2 + p_3 + p_4) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

以上の結果より，$X$ の期待値は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{4} k\, p_k &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} \\ &\quad + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)' dx = \left[-\frac{x\cos 2x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,dx = -\pi$

問 2 $m = n$ のとき $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$

$m \neq n$ のとき $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m-n)x - \cos(n+m)x\}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

問 3 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2x dx = \pi,\ \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x dx = 2\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x dx = -\pi$ より

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi}(x - a\sin x - b\sin 2x)^2 dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}(x^2 + a^2\sin^2 x + b^2\sin^2 2x - 2ax\sin x - 2bx\sin 2x + 2ab\sin x\sin 2x)dx \\
&= \frac{2}{3}\pi^3 + a^2\pi + b^2\pi - 2a\cdot 2\pi - 2b(-\pi) \\
&= \frac{2}{3}\pi^3 + \pi(a^2 - 4a) + \pi(b^2 + 2b) \\
&= \pi(a-2)^2 + \pi(b+1)^2 + \left(\frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi\right)
\end{aligned}$$

よって $a = 2,\ b = -1$ のとき $I$ は最小となり，最小値は $\dfrac{2}{3}\pi^3 - 5\pi$