平成２３年度入学試験問題（前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$ および $\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

◇M3(684—26)

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。このとき，a^2+ab+b^2 と $\dfrac{1}{a-b-1}-\dfrac{1}{a+b+1}$ の値を求めよ。

問 2 3次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の1つの解が $2+\sqrt{3}i$ であるとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。

問 3 次の方程式を解け。

$\log_5(1-4\cdot 5^x)=2x+1$

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

問 3

2 放物線 $y=x^2$ 上の異なる2点P$(p,\ p^2)$，Q$(q,\ q^2)$における接線が点Rで交わっている。次の問いに答えよ。(50点)

問1　Rの座標を求めよ。

問2　$p=-1$，$q=2$ のとき，2本の接線と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
合計	

受　験　番　号

乙 解答例

$\boxed{1}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1=2.732\cdots\cdots$$

ゆえに $a=2,\ b=(\sqrt{3}+1)-2=\sqrt{3}-1$

よって

$$a^2+ab+b^2=2^2+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2=6,$$

$$\frac{1}{a-b-1}-\frac{1}{a+b+1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

問 2 $2+\sqrt{3}i$ が解であるから

$$(2+\sqrt{3}i)^3+a(2+\sqrt{3}i)^2+b(2+\sqrt{3}i)-14=0$$

整理して $(a+2b-24)+(4a+b+9)\sqrt{3}i=0$

$a,\ b$ は実数であるから，$a+2b-24,\ (4a+b+9)\sqrt{3}$ も実数で

$$a+2b-24=0,\quad (4a+b+9)\sqrt{3}=0$$

すなわち

$$a+2b-24=0,\quad 4a+b+9=0$$

これを解いて $a=-6,\ b=15$

問 3 真数は正の数であるから

$$1-4\cdot 5^x>0$$

すなわち

$$5^x<\frac{1}{4}$$

方程式を変形すると

$$1-4\cdot 5^x=5^{2x+1}$$

整理して

$$5(5^x)^2+4\cdot 5^x-1=0$$

因数分解して

$$(5\cdot 5^x-1)(5^x+1)=0$$

$0<5^x<\dfrac{1}{4}$ であるから $5^x=\dfrac{1}{5}$

よって $x=-1$

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問１　P, Q における接線の方程式は

$$y = 2px - p^2, \quad y = 2qx - q^2$$

である。$p \neq q$ なので，交点 R の x 座標は

$$2px - p^2 = 2qx - q^2$$

より

$$x = \frac{p^2 - q^2}{2p - 2q} = \frac{p+q}{2}$$

よって R の座標は $\left(\frac{p+q}{2},\ pq\right)$

問２　$p = -1,\ q = 2$ より R の x 座標は $\frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$。また，$P,\ Q$ における接線の方程式は

$$y = -2x - 1, \quad y = 4x - 4$$

よって求める面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (-2x-1)\}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \{x^2 - (4x-4)\}dx \\
=&\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-2)^2 dx \\
=&\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{2} \\
=&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-2\right)^3 \\
=&\frac{9}{4}
\end{aligned}$$