平成３０年度入学試験問題　(後期日程)

数　学(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注　意　事　項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，120分である。

受　験　番　号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 1辺の長さが1の正方形ABCDにおいて，辺ADの中点をEとする。辺AB上に点Pをとり，線分APの長さをxとおく。次の問いに答えよ。(50点)

問1　xを用いて$\tan\angle \mathrm{EPC}$を表せ。

問2　点Pが辺AB上を動くとき，$\tan\angle \mathrm{EPC}$の最大値と最小値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
小計	

1 解答欄

問1

問2

2 座標平面において，曲線 $y=e^x$ 上の２点Ａ，Ｂを結ぶ線分の中点が$(0,2)$であるとする。このとき，直線ABと曲線$y=e^x$で囲まれた部分の面積を求めよ。(50 点)

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
小計	

2 解答欄

$\boxed{3}$ $f(x)$は4次の整式で，x^4の係数は1であるとする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　方程式$f(x)=0$が4個の異なる実数解をもつとき，方程式$f'(x)=0$は3個の異なる実数解をもつことを示せ。

問2　$f(x)$が$f'(0)=f''(0)=0$をみたすならば，方程式$f'(x)=0$の異なる実数解の個数は2個以下であることを示せ。

問3　方程式$f(x)=0$が3重解をもち，$f'(0)=f''(0)=0$ならば，$f(0)=0$であることを示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

3 **解答欄**

問 1

問 2

問 3

4 不等式 $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$ が表す座標平面内の領域を D とする。原点Oを通る円 C を考える。円 C が D に含まれるという条件のもとで，C の中心Pが動く範囲を図示せよ。(50点)

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採点欄	
小計	

4 解答欄

採　点　欄	
数　　　学	
1	
2	
3	
4	
小計	

受　験　番　号

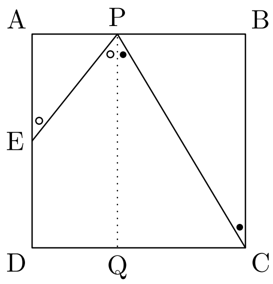
後期 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 点 P から辺 CD に下ろした垂線の足を Q とすると

$$\angle \mathrm{EPC} = \angle \mathrm{EPQ} + \angle \mathrm{CPQ} = \angle \mathrm{AEP} + \angle \mathrm{BCP}$$

である。



$\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{BP} = 1 - x$, $\mathrm{AE} = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{BC} = 1$ なので

$$\tan \angle \mathrm{AEP} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}} = 2x, \qquad \tan \angle \mathrm{BCP} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BC}} = 1 - x$$

である。よって加法定理により

$$\tan \angle \mathrm{EPC} = \tan(\angle \mathrm{AEP} + \angle \mathrm{BCP}) = \frac{2x + (1-x)}{1 - 2x(1-x)} = \frac{x+1}{2x^2 - 2x + 1}$$

となる。

問 2 $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2 - 2x + 1}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最大値と最小値を調べれば良い。

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 3}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

なので，$f'(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$ のときであるが，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では $x = \dfrac{-2 + \sqrt{10}}{2}$ のみである。よって $f(x)$ 増減表は次のようになる。

x	0	$\ldots$	$\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$	$\ldots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$	$\searrow$	2

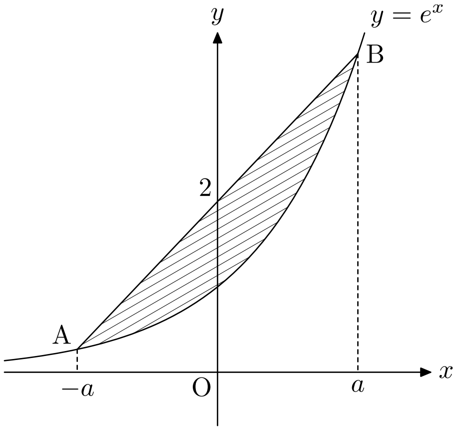
以上により，$x = \dfrac{-2 + \sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$ を，$x = 0$ のとき最小値 1 をとる。

$\boxed{\mathbf{2}}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

線分 AB の中点が y 軸上にあるので，$\mathrm{A}(-a, e^{-a})$, $\mathrm{B}(a, e^{a})$ $(a > 0)$ と表せる。このとき，$\dfrac{e^{-a}+e^{a}}{2} = 2$ なので，$e^{2a} - 4e^{a} + 1 = 0$ である。これより，$e^{a} = 2 \pm \sqrt{3}$ となるが，$a > 0$ なので，$e^{a} = 2 + \sqrt{3}$, $e^{-a} = 2 - \sqrt{3}$, $a = \log(2 + \sqrt{3})$ である。

求める面積は，

$$\frac{(e^{a}+e^{-a}) \times 2a}{2} - \int_{-a}^{a} e^{x}dx = 4\log(2+\sqrt{3}) - \left[e^{x}\right]_{-a}^{a} = 4\log(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}$$



$\boxed{\mathbf{3}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $f(x)=0$ の異なる実数解を小さい順に $a_1<a_2<a_3<a_4$ とすると，

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

と表せる。両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)=&(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_3)(x-a_4)\\&+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_4)+(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\end{aligned}$$

となる。$a_1-a_2<0, a_1-a_3<0, a_1-a_4<0$ より $f'(a_1)=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)<0$ である。同様の計算により，$f'(a_2)>0,\ f'(a_3)<0,\ f'(a_4)>0$ がわかる。したがって $i=1,2,3$ に対して $f'(a_i)f'(a_{i+1})<0$ であるから，中間値の定理より $a_i<x_i<a_{i+1}$ かつ $f'(x_i)=0$ をみたす実数 x_i がある。これら x_1,x_2,x_3 は $f'(x)=0$ の異なる実数解である。

問 2 $f(x)$ は 4 次式で x^4 の係数が 1 だから，$f''(x)$ は 2 次式で x^2 の係数は 12 である。$f''(0)=0$ より，$f''(x)=12x(x-q)=12x^2-12qx$ とおける。これと $f'(0)=0$ とから，$f'(x)=4x^3-6qx^2=2x^2(2x-3q)$ である。したがって $f'(x)=0$ の実数解は，$q=0$ ならば $x=0$ のみ，$q\neq 0$ ならば $x=0,\dfrac{3q}{2}$ である。つまり $f'(x)=0$ の異なる実数解は高々 2 個である。

問 3 $f(x)=(x-s)^3(x-t)$ とおくと，$f'(x)=(x-s)^2(4x-s-3t)$, $f''(x)=6(x-s)(2x-s-t)$ である。まず $f'(0)=0$ から

$$s^2(s+3t)=0 \tag{1}$$

であり，次に $f''(0)=0$ から

$$6s(s+t)=0 \tag{2}$$

である。(1) から $s=0$ または $s=-3t$ である。$s=0$ ならば，(2) もみたす。$s=-3t$ ならば，これを (2) に代入して $s=t=0$ を得る。いずれの場合も $s=0$ となるから，$f(x)=x^3(x-t)$ であり，$f(0)=0$ が成り立つ。

$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

P(X, Y) とおく。$X \geqq 0, Y \geqq 0$ で考える。

Q$(1, 0)$, R$(1, 1)$, S$(0, 1)$ とする。円 C の半径は $\sqrt{X^2+Y^2}$ である。点 P から線分 QR までの距離は $1-X$ であり，点 P から線分 RS までの距離は $1-Y$ である。

まず，$Y \geqq X$ の場合を考える。この場合には，$1-X \geqq 1-Y$ であるので，円 C が領域 D に含まれるのは，

$$1-Y \geqq \sqrt{X^2+Y^2}$$

のときである。この両辺は正なので，両辺を二乗すると，

$$(1-Y)^2 \geqq X^2+Y^2$$

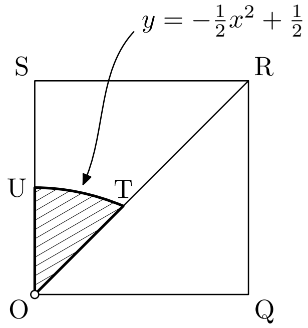
この式を整理すると，

$$Y \leqq -\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}$$

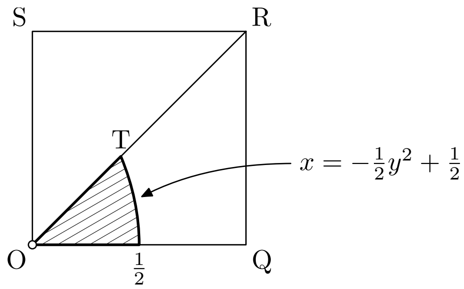
を得る。曲線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ と線分 OR，線分 OS の交点をそれぞれ T, U とすると，

$$\mathrm{T}(a, a), \quad \mathrm{U}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

である（ただし $a=\sqrt{2}-1$）。よって，この場合の P の動く範囲は下図の斜線部分となる。ただし，原点は含まないが，それ以外の境界は含むものとする。



次に，$Y \leqq X$ の場合を考える。この場合には，X と Y の立場を入れかえて同様の議論をすると，P の動く範囲は下図の斜線部分となることがわかる。ただし，原点は含まないが，それ以外の境界は含むものとする。



以上のことと図形の対称性から，求める範囲は下図の斜線部分となる。ただし，境界は含み，原点は含まないとする。