平 成 3 0 年 度 入 学 試 験 問 題 （前期日程）

数　学　乙(数Ⅰ・数Ⅱ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が出題されている。
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。
2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。
3. 解答時間は，60分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　今日は日曜日で，10 日後は水曜日である。100 日後および 100 万日後はそれぞれ何曜日か，理由とともに答えよ。

問 2　x の方程式 $\log_2(x-1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-4)=1$ を解け。

問 3　三角形 OAB で，辺 OA を 2:1 に内分する点を L，辺 OB の中点を M，辺 AB を 2:3 に内分する点を N とする。線分 LM と ON の交点を P とする。$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とするとき，$\overrightarrow{ON}$ と $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

1 **解答欄**

問 1

問 2

問 3

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = x|x-3|$ $(0 \leqq x \leqq 4)$について，次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$y = f(x)$のグラフをかけ。

問 2　微分係数 $f'(2)$の値を求めよ。

問 3　定積分 $\int_0^4 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学乙	
1	
2	
小計	

受　験　番　号

乙 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 n を 7 で割った余りが $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に応じて，n 日後の曜日は日，月，火，水，木，金，土となる。a を 7 で割った余りと b を 7 で割った余りが等しいとき $a \equiv b \pmod 7$ と書く。$10 \equiv 3 \pmod 7$ より $100 = 10^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod 7$ だから，100 日後は火曜日。

$10^6 = (10^2)^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod 7$ となり，100 万日後は月曜日。

問 2 対数の真数は正でなければならないので $x - 1 > 0$ かつ $x - 4 > 0$，すなわち $x > 4$ でなければならない。

$$\begin{aligned}\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) &= \log_2(x-1) - \frac{\log_2(x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= \log_2(x-1) + \log_2(x-4) \\ &= \log_2(x-1)(x-4)\end{aligned}$$

であり，また $1 = \log_2 2$ なので $(x-1)(x-4) = 2$ となり，$x^2 - 5x + 2 = 0$ である。この 2 次方程式を解くと，

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

となるが，$x > 4$ なので，$x = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$ である。

問 3 点 N は線分 AB を $2:3$ に内分するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \tag{1}$$

$\mathrm{OP} : \mathrm{ON} = s : 1\ (0 < s < 1)$ とすると，(1) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3}{5}s\,\vec{a} + \frac{2}{5}s\,\vec{b} \tag{2}$$

点 L は線分 OA を $2:1$ に内分し，点 M は線分 OB を $1:1$ に内分するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{2}{3}\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2}\vec{b} \tag{3}$$

$\mathrm{LP} : \mathrm{PM} = t : 1 - t\ (0 < t < 1)$ とすると，(3) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OL}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{2(1-t)}{3}\,\vec{a} + \frac{t}{2}\,\vec{b} \tag{4}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}, \vec{b}$ は平行ではないので，(2) と (4) より，

$$\frac{3}{5}s = \frac{2(1-t)}{3}, \quad \frac{2}{5}s = \frac{t}{2} \tag{5}$$

(5) を解くと，$s = \dfrac{10}{17}, t = \dfrac{8}{17}$ である。よって，(2) より，

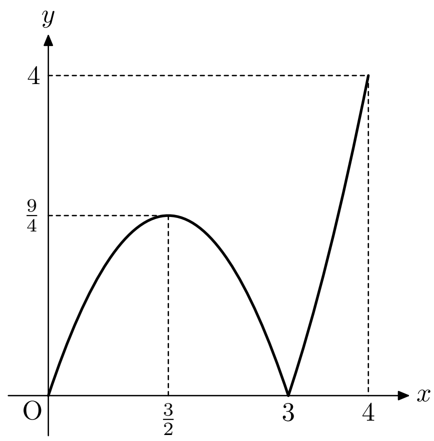
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{6}{17}\vec{a} + \frac{4}{17}\vec{b}$$

2 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 x と 3 の大小に応じて絶対値をはずすと，$f(x)$ は次のようになる。

$$f(x)=\begin{cases} x(3-x) & 0 \leqq x \leqq 3 \text{ のとき} \\ x(x-3) & 3 < x \leqq 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

したがってグラフは次の通り。



問 2 $0 \leqq x \leqq 3$ においては $f(x)=x(3-x)$ である。この範囲では $f'(x)=-2x+3$ で $f'(2)=-1$ である。

問 3 x と 3 の大小に応じて場合分けして考えると

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^3 x(3-x)dx+\int_3^4 x(x-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4=\frac{19}{3}$$