平成30年度入学試験問題　(前期日程)

数学　甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注意事項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。

2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。

3. 解答時間は，120分である。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 aを正の実数とする。関数$f(x) = -x^2 + 4x$と$g(x) = 2|x - a|$について，次の問いに答えよ。(50点)

問1　$y = f(x)$のグラフと$y = g(x)$のグラフの共有点が1点となるようなaの値を求めよ。

問2　問1で求めたaの値のときに，$y = f(x)$のグラフ，$y = g(x)$のグラフおよびx軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

問3　$y = f(x)$のグラフと$y = g(x)$のグラフが異なる2点で交わるようなaの値の範囲と，2つの交点のx座標を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

1 **解答欄**

問 1

問 2

問 3

2 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=n^2+n+1$ とおく。さらに，実数 $x_n,\ y_n$ を

$$(a_1+i)(a_2+i)(a_3+i)\cdots(a_n+i)=x_n+y_n i\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。ただし i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$x_2,\ y_2$ および $x_3,\ y_3$ を求めよ。

問 2　自然数 n に対して，$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ が成り立つことを示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 **解答欄**

問 1

問 2

3 関数 $y=e^{\sin x+\cos x}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ の増減，極値，凹凸を調べ，そのグラフをかけ。(50 点)

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
小計	

3 解答欄

4 2つの箱A，Bがあり，どちらの箱にも赤玉と白玉が1個ずつ入っている。それぞれの箱から，無作為に玉を1個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す。n 回の操作の後，箱A，Bのどちらにも赤玉，白玉が1個ずつ入っている確率を p_n とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1　p_1，p_2 を求めよ。

問2　p_n を用いて p_{n+1} を表せ。

問3　自然数 n に対して，p_n を求めよ。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学甲	
1	
2	
3	
4	
小計	

受　験　番　号

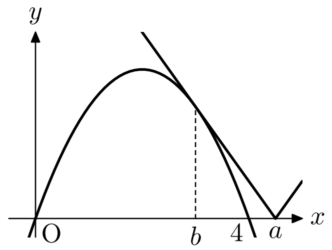
甲　解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 まず

$$g(x)=\begin{cases}-2x+2a & x\leqq a \text{ のとき}\\ 2x-2a & x>a \text{ のとき}\end{cases}$$

である。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点が 1 点となるのは，それらが図のような位置関係にある，つまり $y=-2x+2a$ が $y=f(x)$ の接線となる場合である。

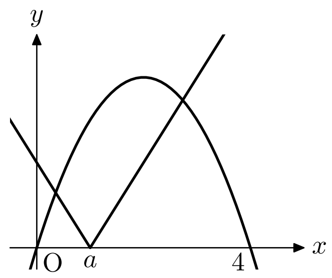


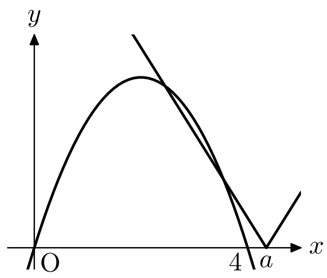
$x=b$ で接するとすると，$f'(x)=-2x+4$ なので，$f'(b)=-2$ より $b=3$ であり，また $f(b)=3$ である。よって $y=g(x)$ が点 $(3,3)$ を通ることから $a=\dfrac{9}{2}$ となる。

問 2 求める面積は，3 点 $(3,3)$, $(3,0)$, $\left(\dfrac{9}{2},0\right)$ を頂点とする直角三角形の面積から，$y=f(x)$ のグラフと直線 $x=3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を引いた値に等しい，つまり

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}-3\right)3-\int_3^4(-x^2+4x)dx=\frac{9}{4}-\frac{5}{3}=\frac{7}{12}$$

問 3 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの位置関係は，$0<a<4$ のときに下図の左側，$4\leqq a<\dfrac{9}{2}$ のときに下図の右側のようになる。問 1 より $a=\dfrac{9}{2}$ のときは共有点は 1 つで，また $a>\dfrac{9}{2}$ のときは共有点を持たない。よって，$0<a<\dfrac{9}{2}$ のときに $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは異なる 2 点で交わる。





また，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は，(I) $0<a<4$ のとき，$f(x)=-2x+2a$ $(x\leqq a)$ の解と $f(x)=2x-2a$ $(x>a)$ の解なので，$x=3-\sqrt{9-2a}$, $1+\sqrt{1+2a}$ であり，(II) $4\leqq a<\dfrac{9}{2}$ のとき，$f(x)=-2x+2a$ の解なので $x=3\pm\sqrt{9-2a}$ である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 13$ なので

$$\begin{aligned} x_2 + y_2 i &= (a_1 + i)(a_2 + i) = (3 + i)(7 + i) = 20 + 10i, \\ x_3 + y_3 i &= (a_1 + i)(a_2 + i)(a_3 + i) = (20 + 10i)(13 + i) = 250 + 150i \end{aligned}$$

である。よって $x_2 = 20$, $y_2 = 10$, $x_3 = 250$, $y_3 = 150$ である。

問 2 n に関する数学的帰納法で

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{n}{n+2} \tag{A}$$

が成り立つことを示す。$n = 1$ のときは $a_1 + i = 3 + i$ より $x_1 = 3$, $y_1 = 1$ なので $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{1}{3}$ となり (A) が成り立つ。$n = k$ $(k \geqq 1)$ のときに (A) が成り立つと仮定すると $\dfrac{y_k}{x_k} = \dfrac{k}{k+2}$ である。すると $n = k + 1$ のとき,

$$x_{k+1} + y_{k+1} i = (x_k + y_k i)(a_{k+1} + i) = x_k a_{k+1} - y_k + (x_k + y_k a_{k+1}) i$$

より $x_{k+1} = x_k a_{k+1} - y_k$, $y_{k+1} = x_k + y_k a_{k+1}$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} &= \frac{x_k + y_k a_{k+1}}{x_k a_{k+1} - y_k} = \frac{1 + a_{k+1}\dfrac{y_k}{x_k}}{a_{k+1} - \dfrac{y_k}{x_k}} \\ &= \frac{1 + (k^2 + 3k + 3)\dfrac{k}{k+2}}{k^2 + 3k + 3 - \dfrac{k}{k+2}} \quad (\because \text{帰納法の仮定と } a_{k+1} = k^2 + 3k + 3) \\ &= \frac{k^3 + 3k^2 + 4k + 2}{k^3 + 5k^2 + 8k + 6} \\ &= \frac{(k+1)(k^2 + 2k + 2)}{(k+3)(k^2 + 2k + 2)} = \frac{k+1}{k+3} \end{aligned}$$

となる。よって $n = k + 1$ でも (A) が成り立つ。以上より，任意の自然数 n に対して (A) が成り立つ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ に注意して

$$\begin{aligned}
y'&=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})},\\
y''&=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)e^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\\
&=\left(2-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\\
&=2\left(\sqrt{2}+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}
\end{aligned}$$

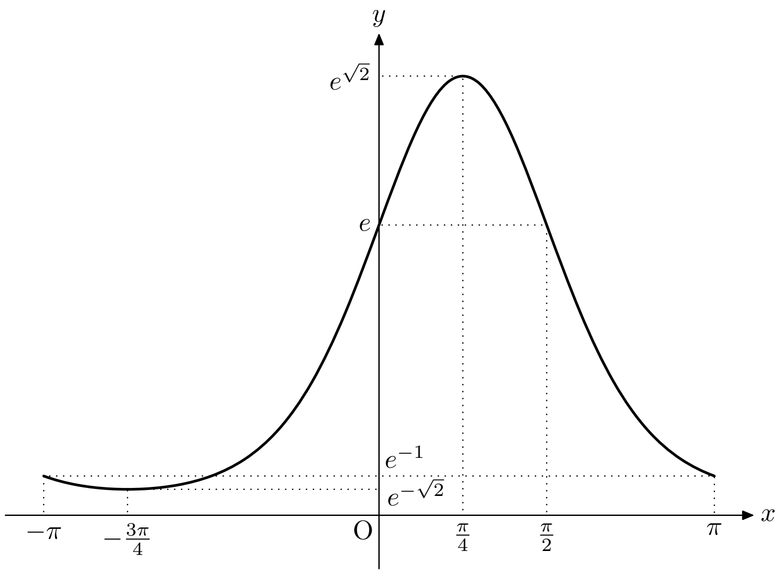
である。$e^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}>0$, $\sqrt{2}+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$ なので，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ の範囲において，

$$\begin{aligned}
y'=0 &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \iff x=-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\\
y''=0 &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \iff x=0,\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

であるから，増減表を書くと以下のようになる。

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	e^{-1}	↘	$e^{-\sqrt{2}}$	↗	e	↗	$e^{\sqrt{2}}$	↘	e	↘	e^{-1}

よって，y は $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ で極小値 $e^{-\sqrt{2}}$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $e^{\sqrt{2}}$ をとり，また点 $(0,e)$ と $\left(\dfrac{\pi}{2},e\right)$ が変曲点である。グラフは以下のようになる。



$\boxed{4}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1 1 回目の操作で，A, B 共に赤玉，白玉が 1 個ずつ入っているためには，それぞれから同じ色の玉を取り出すことが必要十分である。取り出し方は全部で 4 通りあり，同じ色を取り出す方法は 2 通りなので，$p_1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ である。

2 回目の操作を考える。1 回目の操作の後，A, B 共に赤玉，白玉が 1 個ずつ入っていて，それらから同じ色の玉を取り出す確率は，上の考え方と同様にすると，$p_1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ である。

1 回目の操作で A, B 共に同じ色の玉が入っている状態になれば，次の操作では，必ず A, B には赤玉，白玉が 1 個ずつになる。よってこの確率は，$(1-p_1) \times 1 = \dfrac{1}{2}$ である。

これら 2 つは，互いに背反なので，求める確率は，$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$ である。

問 2 問 1 の p_2 を求めたのと同様に考える。$n+1$ 回目では，n 回の操作で A, B 共に赤玉，白玉が 1 個ずつ入っていてその後同じ色の玉を取り出すか，n 回目の操作で A, B 共に同じ色の玉が入っていて $n+1$ 回目の操作を行うかである。したがって，

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + (1-p_n) = -\frac{1}{2}p_n + 1$$

問 3 問 2 の漸化式から，

$$p_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(p_1 - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

これは，$n=1$ のときにも成立している。